

ปัญญาธรรมชาติ



THE AICE LIBRARY

ปัญญาธรรมชาติ

คู่มือภาคสนามแห่งใหม่สำหรับมนุษย์ — ปรีศนา การคิดแนวข้าง และศิลปะการ
ใช้เหตุผลที่เครื่องจักรยังไปไม่ถึง



ฉบับพิมพ์ครั้งแรก · กรกฎาคม 2026

ปัญญาธรรมชาติ — คู่มือภาคนามแห่งไหวพริบนุษย์

เรียบเรียงโดยทีม AICE ฉบับภาษาไทย กรกฎาคม 2026 (แปลจากต้นฉบับภาษาอังกฤษ)

หนังสือเล่มนี้ถูกสร้างด้วยวิธีเดียวกับที่มันสอน คลังปริศนา 50 ข้อผ่านการตรวจแก้ที่มาให้ถูกต้องและระบุไว้ในเนื้อหาโดยไม่ซุกซ่อน เฉลย 16 ข้อผ่านการตรวจยืนยันด้วยเครื่องแบบไล่ทุกกรณีก่อนตีพิมพ์ และทุกข้อความที่กล่าวถึงปัญญาประดิษฐ์ระบุวันที่กำกับ — กรกฎาคม 2026 — เพราะประโยคเหล่านั้นถูกออกแบบมาให้แก้ตัวอย่างซื่อสัตย์

ปริศนาหนึ่งข้อถูกตั้งไว้ที่ต้นเล่ม และเฉลยเฉพาะที่บันทึกท้ายเล่มเท่านั้น ผู้อ่านที่เข้าไปดูจะได้คำตอบ แต่เสียประเด็นสำคัญไป

เรียงพิมพ์ด้วยฟอนต์ Sarabun (ฝังฟอนต์) สร้างด้วย WeasyPrint หนังสือแห่งห้องสมุด AICE — [books/thinking/natural-intelligence](#)

"สิ่งใดเดินสี่ขาในยามเช้า สองขาในยามเที่ยง และสามขาในยามเย็น"

สฟิงซ์ — ผู้เฝ้าประตูมาตั้งแต่อีบส์

คำตอบอยู่ที่หน้าสุดท้ายของหนังสือเล่มนี้ ทุกสิ่งระหว่างตรงนี้กับตรงนั้นคือการฝึกฝน
สำหรับประตูบานต่อไป ที่นางเฝ้าอยู่ในวันนี้

สารบัญ

วิธีใช้หนังสือเล่มนี้	11
บทนำ — ทำไมต้องไหวพริบ	15
สายธารปริศนา	19
1. ปริศนาหน้าประตู	21
2. ยุคทองของนักปริศนา	31
3. คิดเรื่องการคิด	41
คลังทำคิด	51
4. ทลายกรอบ	53
5. นิรนัยบริสุทธิ์	63
6. ตัวเลข โอกาส และรูปทรง	75
7. ห้องบอส	89
สมองโอลิมปิก	103
8. แชมป์คิดอย่างไร	105
9. ทำสังหาร	115
10. เครื่องมือนักสร้าง	129
11. สายตานักจำลองแบบ	143
แต้มต่อของมนุษย์	159
12. กระดานคะแนน	161
13. คู่มือ	171
14. การไล่กวด	181
โรงยิมทางปัญญา	191
15. ฝึกแต้มต่อ	193
16. หลักสูตรสามสิบวัน	203
ภาคผนวก ค — คลังสำรอง	213

ภาคผนวก ก — ดัชนีท่าคิด	225
ภาคผนวก ข — สูสานมายาคติแห่งการคิด	229
อ่านต่อจากตรงนี้	233
บันทึกท้ายเล่ม	235

วิธีใช้หนังสือเล่มนี้

หนังสือเล่มนี้ขอให้คุณทำสิ่งที่หนังสือแทบไม่เคยขอ: หยุดอ่าน กว่าห้าสิบครั้งตลอดหน้ากระดาษเหล่านี้ ปริศนาข้อหนึ่งจะถูกวางลงตรงหน้าคุณ และทุกสิ่งที่หนังสือเล่มนี้สอนได้อาศัยอยู่ในนาฬิกาที่คุณอยู่กับมันตามลำพัง อ่านรวดเดียวจบ คุณจะได้เกร็ดความรู้กลับไปหยุด ปล้ำกับมัน แล้วหน้ากระดาษเดิมจะกลายเป็นการฝึกฝน

พิธีกรรม

ปริศนาทุกข้อในเล่มนี้ใช้แบบแผนเดียวกัน เริ่มด้วยตัวโจทย์ พร้อมตัวเลขทุกตัวที่คุณต้องใช้ ตามด้วยบรรทัดตัวเอียงหนึ่งบรรทัด — หยุดตรงนี้ก่อน หน้ากระดาษรอได้ — ซึ่งเป็นทางออกสุดท้ายก่อนถึงคำตอบ (ถ้อยคำของมันเปลี่ยนไปเรื่อย ความหมายไม่เคยเปลี่ยน) เฉลยตามมาทันทีในหน้าเดียวกัน เพราะเฉลยที่ต้องพลิกหาคือเฉลยที่คุณจะข้าม ฉะนั้นจงบังมันไว้ ใช้บัตรแข็งสักใบเป็นที่คั่นหนังสือ แล้วใช้มันเป็นบานเลื่อนปิดตา ปล้ำกับโจทย์จนแก้ได้ หรือจนกว่าจะถ้อยของบางอย่างที่ดีกว่าความว่างเปล่า: แผนทีล้มเหลวไปแล้วหนึ่งแผน แพตเทิร์นที่คุณเริ่มระแคะระคาย เหตุผลว่าทำไมคำตอบโด้ง ๆ ตรงหน้าจึงถูกไม่ได้ แล้วค่อยอ่านต่อ ความพยายามทีล้มเหลวจะแปลงเฉลยจากข้อมูลให้กลายเป็นการแก้ไข และการแก้ไขคือที่ที่การเรียนรู้เกิดขึ้นจริง

จะอ่านไว้นานแค่ไหน: ห้าหรือสิบนาทีก่อนสำหรับข้อง่าย ข้อยากให้เวลามันทั้งเที่ยวเดินทางกลับบ้าน หรือทั้งคืน ความผิดข้อเดียวที่อภัยไม่ได้คือแอบเปิดดูตั้งแต่วันแรกที่สามสิบอาการติดขัดไม่ใช่ความบกพร่องของระบบ อาการติดขัดนั้นแหละคือตัวสินค้า

ดาว

- ★ — ใครก็แก้ได้: โอเคเสียชื่อ ๆ หนึ่งดวง ไม่ต้องมีความรู้พิเศษ
- ★★ — มือสมัครเล่นที่เอาจริงไปถึง
- ★★★ — ความท้าทายเนื้อแน่น เพื่อใจให้การออกตัวผิดสักครั้งสองครั้ง
- ★★★★ — ยาก นักแก้ส่วนใหญ่ต้องการคำใบ้ หรือการนอนสักระยะ

- ★★★★★ — ระดับเพชรฆาต แก้ได้เองโดยไร้ตัวช่วยคือเหตุการณ์ที่ควรค่าแก่การเล่าให้ใครสักคนฟัง

ดาววัดระยะทางไปถึงไอเดีย ไม่ได้วัดเลขคณิต

เหล่าทำคิด

เฉลยทุกข้อจบแบบเดียวกัน: **ทำ** — หนึ่งย่อหน้าที่ตั้งชื่อให้แพตเทิร์นใช้ซ้ำได้ซึ่งปริศนาข้อนั้นเพิ่งสอนไป — หาปริมาณไม่แปรเปลี่ยน แยกกรณีตามขั้นตอน แก่เกมปลายกระดานก่อน ทำคิดต่างหากคือหลักสูตร ปริศนาเป็นเพียงพานะนำส่ง มีทำอยู่ราวสามสิบทำ ทำดัชนีไว้ในภาคผนวก ก และพวกมันไหลมาในงานดีบัก การเจรจา การแพทย์ และกฎหมาย บ่อยกว่าในเกมห้องรับแขกมากนัก เมื่อทำไหนล้นขึ้นในชีวิตประจำวันของคุณ จงเอ่ยชื่อมัน การเรียกชื่อคือวิธีที่กลเม็ดกลายเป็นเครื่องมือ

ส่วนต่าง ๆ ของเล่ม

ภาค I คือสายตระกูล: เกือบสี่พันปีของปริศนา จากมุกตลกของอาลักษณ์ถึงข้อสอบเข้าของเครื่องจักร **ภาค II** คือคลังแสง — ทำคิดหลัก สอนทีละปริศนา จากง่ายไปยาก **ภาค III** คือศิลปะเดียวกันภายใต้แรงกดดัน: นักแก้ระดับโอลิมปิกคิดกันจริง ๆ อย่างไร **ภาค IV** คือกระดานคะแนนฉบับตรงไปตรงมาของไหวพริบมนุษย์ปะทะปัญญาประดิษฐ์ ทุกข้ออ้างระบุนันท์กำกับ **ภาค V** คือโรงยิม: หลักสูตรฝึกสามสิบวัน และสิ่งที่หลักฐานเรื่องการฝึกสัญญาได้ — และสัญญาไม่ได้

สามเส้นทางอ่าน

- **เส้นทางนักปริศนา** เริ่มบทที่ 1 ก่อน — พิธีเปิดของคุณรออยู่ที่นั่น — จากนั้นภาค II และ III ตามลำดับ ใช้บทประวัติศาสตร์เป็นวันพัก และเก็บภาค V ไว้เมื่อพร้อมเข้าโปรแกรม
- **เส้นทางนักวิชาการ** อ่านจากปกหน้าถึงปกหลัง หนังสือถูกสร้างตามลำดับนั้นพอดี: ศิลปะนี้มาจากไหน มันคืออะไร ใครกำลังมาชิงมัน และจะรักษามันไว้อย่างไร

- **เส้นทางผู้จัดการ** เวลานั้น: อ่านบทนำ แล้วบทที่ 8 แล้วสรุปทำท้ายบททุกบททุกภาคผนวก ก แล้วปิดด้วยภาค IV แก่ปริศนา ★★ หนึ่งข้อคู่กาแพยามเช้า — นิสัยนี้ให้ผลเหนือการอ่าน

ตัวหนังสือเล็กท้ายสัญญา

ข้ออ้างที่แบกน้ำหนักจริงถูกให้เกรดกำกับในเนื้อความ: ✪ กลไก · ๕๕ หลักฐานแน่น · ♦ อิ
วิสติกที่ใช้การได้ · ▲ ยังถกเถียง ในภาค IV ความสามารถของเครื่องยังสวมป้าย —

DURABLE , **ERODING** , **FALLEN** — และทุกข้ออ้างเรื่อง AI พกวันที่ของมันมาด้วย เพราะ
สนามนั้นขยับรายเดือน และประโยคของเดือนกรกฎาคม 2026 ก็คือประโยคของเดือน
กรกฎาคม 2026 ปีทั้งเล่มเป็นคริสต์ศักราช ประวัติศาสตร์ที่ชำระแล้วถูกกล่าวอย่างตรง
ไปตรงมา: เครดิตอันเลื่องชื่อบางรายการในวงการนี้เป็นของปลอม และหนังสือเล่มนี้เอ่ย
ชื่อพวกมัน

อีกเรื่องหนึ่ง ปริศนาคำทายข้อแรกของหนังสือเล่มนี้ — ปริศนาเฝ้าประตูที่เก่าแก่ที่สุด
เท่าที่เรามี — ถูกตั้งไว้ในบทที่ 1 และไม่ถูกเฉลยที่ใดเลยตลอดสิบหกบทถัดจากนั้น คำ
ตอบของมันรออยู่ในบันทึกท้ายเล่ม แทบจะหน้าสุดท้าย ถ้าคุณทนรอไม่ไหว ก็มีทางแก้
อยู่หนึ่งทาง: แก้มันเสียเอง

บทนำ — ทำไมต้องไหวพริบ

ราว 1550 ปีก่อนคริสตกาล อาลักษณ์ชาวอียิปต์ชื่อ Ahmes (อาห์เมส) นั่งลงคัดลอกม้วนตำราคณิตศาสตร์ซึ่ง — ตามบันทึกของเขาเอง — เก่าแก่มาแล้วราวสองศตวรรษ เนื้อหาส่วนใหญ่เป็นเรื่องงานอาชีพอันเคร่งขรึม — ข้าว ขนมปัง เรขาคณิตของความชัน แล้วก็มาถึงโจทย์ข้อ 79 บานเจ็ดหลัง แต่ละหลังมีแมวเจ็ดตัว แมวแต่ละตัวฆ่าหนูเจ็ดตัว หนูแต่ละตัว (ถ้ารอด) จะกินรวงข้าวสเปลด์เจ็ดรวง รวงแต่ละรวงจะให้ข้าวเจ็ดเฮคต Ahmes ใต่บันไดขึ้นไป — 7, 49, 343, 2,401, 16,807 — แล้วเขียนยอดรวม: 19,607

ไม่มียุ่งฉางไหนต้องการตัวเลขนั้น ภาษีของใครก็ได้ขึ้นกับแมว โจทย์ข้อ 79 คือเลขคณิตที่ทำเพื่อความสับสน — อนุกรมเรขาคณิตสวมชุดแพนซี — และมันคือหนึ่งในชิ้นงานความคิดเชิงสันตนาการที่เก่าแก่ที่สุดเท่าที่หลงเหลือมาถึงเรา

และมันไม่ยอมตาย เกือบสามพันปีหลัง Ahmes, Leonardo แห่ง Pisa บรรจุมุกเดียวกันลงใน Liber Abaci ของเขา: หญิงชราเจ็ดคนบนถนนสู่กรุงโรม แต่ละคนมีล่อเจ็ดตัว ล่อแต่ละตัวแบกกระสอบเจ็ดใบ อีกห้าศตวรรษถัดมา เด็ก ๆ อังกฤษก็ท่องมันเป็นกลอน — as I was going to St Ives, I met a man with seven wives ปรากฏว่าปริศนาชั้นดีคือมีมที่มีครึ่งชีวิตยาวสามพันปี

หนังสือเล่มนี้ว่าด้วยเส้นด้ายเส้นนั้น — ความยาวเกือบสี่พันปีของมัน — และว่าด้วยสิ่งที่เส้นด้ายเส้นนี้ทำกับพวกเรามาตลอดทาง

โรงยิมที่เก่าแก่ที่สุด

ปริศนาคือแพตเทิร์นความคิดที่สวมชุดแพนซี ถอดแมวและข้าวสเปลด์ออกจากโจทย์ข้อ 79 คุณจะเหลือการเติบโตแบบเลขชี้กำลังอยู่ในมือ ถอดแม่น้ำและเรือออกจากปริศนาฉบับสมองศตวรรษที่แปดข้อหนึ่ง คุณจะเหลือการค้นปริภูมิสถานะ ถอดประตูออกจากเกมโชว์รายการหนึ่ง คุณจะเหลือความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข — ของจริง ชนิดที่ขึ้นกับว่าหลักฐานเดินทางมาถึงคุณอย่างไร ชุดแพนซีนันทกยุคได้ แพตเทิร์นไม่เคย โครงสร้างลึกราวหนึ่งโหลถูกจับแต่งตัวใหม่แล้วขายซ้ำข้ามสหัสวรรษ — จัตุรัสกลกลายเป็นซูโดกุ

ปริศนาหน้าประตูกลายเป็นข้อสอบเข้าสำหรับเครื่องจักร — เพราะกลัมน้ำเนื้อที่พวกมันฝึกยังคงสำคัญไม่เสื่อมคลาย

ราวปี 800 ใครบางคนในราชสำนักของ Charlemagne (ชาร์เลอมาญ) — ธรรมเนียมเล่าว่าคือ Alcuin of York (อัลควินแห่งยอร์ก) — รวบรวมโจทย์ทำสิบกว่าข้อไว้ได้ชื่อเรื่องทะเลยมเจตนาทั้งหมด: Propositiones ad acuendos juvenes — โจทย์เพื่อลับเขียวชวนให้คม ไม่ใช่เพื่อความบันเทิง: เพื่อลับให้คม นั่นคือถ้อยแถลงชัดถ้อยชัดคำที่เก่าแก่ที่สุดของวิทยานิพนธ์ประจำหนังสือเล่มนี้: ปริศนาคือโรงยิมที่เก่าแก่ที่สุดของจิตใจ ทุกยุคติดตั้งอุปกรณ์ใหม่ จัตุรัสการสอนเงื่อนไขบังคับและปริมาณไม่แปรเปลี่ยน โจทย์ข้ามฟากสอนการวางแผน ปริศนาซึ่งนำนักสอนเศรษฐศาสตร์ของข้อมูล รหัสลับสอนว่าโครงสร้างรู้ไหลได้แม้เนื้อหาถูกซ่อน โรงยิมแห่งนี้เติบโตมาสู่สิบศตวรรษ ที่ละเครื่องเล่น และเกือบทั้งหมดยังใช้งานได้จนวันนี้

สมรรถนะที่อุปกรณ์ทั้งหมดนั้นฝึกให้ สมควรได้ชื่อเรียกตรง ๆ และหนังสือเล่มนี้เลือกใช้คำเก่าแก่คำหนึ่ง: **ไหวพริบ** — ปลายด้านที่เร็ว ยืดหยุ่น และแก้ขัดเก่งของสติปัญญา ส่วนที่สังเกตเห็น พลิกกรอบ แล้วตะครุบ ไม่ใช่ความรู้ที่สั่งสม และไม่ใช้การคำนวณ แต่คือสิ่งที่ขยับ เมื่อโจทย์เป็นของใหม่

ทำไมต้องมีคู่มือ และทำไมต้องตอนนี้

ตลอดเกือบทั้งสิบศตวรรษนั้น "นักแก้ปริศนาที่เก่งที่สุดเท่าที่ทำได้" หมายถึงมนุษย์คนหนึ่ง โดยนิยาม สิ่งนั้นเพิ่งเลิกเป็นเรื่องอัศจรรย์เมื่อไม่นานมานี้เอง — ภายในช่วงอายุของหนังสือเล่มที่คุณถืออยู่ ทุกวันนี้เครื่องจักรแก้โจทย์ปิดนิยามชัดจำนวนไม่น้อย ซึ่งประเพณีนี้ใช้เวลาหลายสหัสวรรษขัดเงา ได้ในระดับเทียบเท่าหรือเหนือกว่ามนุษย์ฝีมือดี ด้วยรางวัลบางใบที่ใคร ๆ นิกว่าปลอดภัยได้ร่วงไปแล้ว ใบอื่น — และนี่คือส่วนที่น่าสนใจ — แทบไม่ขยับเลย ใบไหนร่วง ใบไหนยังยืน และอะไรแยกสองอย่างนั้นออกจากกัน คือฐานะของภาค IV ที่ซึ่งทุกข้ออ้างพวกวันที่และแหล่งอ้างอิง เพราะในสังเวียนนั้น ความจริงของประโยคหนึ่งมีวันหมดอายุ

มีเรื่องหนึ่งควรบอกไว้ล่วงหน้า สมรรถนะที่ยังดีอรันเป็นของมนุษย์ที่สุด ไม่ใช่ของแปลกพิสดาร แต่เป็นพวกที่ฟังดูธรรมดาสามัญ: สังเกตให้ออกว่าตัวเองกำลังอยู่ในโจทย์ชนิดไหนกันแน่ ทั้งวิธมองที่แย่เพื่อวิธมองที่ดีกว่า รู้ว่าตัวเองไม่รู้อะไรและกล้าพูดออกมา ถือ

ครองเป้าหมายข้ามห้วงโลกอันยาวและยุ่งเหยิง สิ่งเหล่านั้นบังเอิญเป็น — แทบจะเป๊ะ — กล้ามเนื้อชุดเดียวกับที่ประเพณีปริศนาฝึกมาตลอด ความบังเอิญนั้นคือเหตุผลของหนังสือเล่มนี้ ปัญญาธรรมชาติใช้เวลาสี่พันปีสร้างโรงยิมของตัวเอง บัดนี้ เมื่อมีนักแก๊สสายพันธุ์ที่สองเข้ามาอยู่ในอาคารเดียวกัน ดูจะเป็นจังหวะที่แย่มากเกินไปสำหรับการยกเลิกสมาชิกภาพ

หนังสือเล่มนี้สัญญาอะไร

สืออย่าง

การเล่นที่ตรวจทานแล้ว ปริศนาในเล่มถูกตั้งโจทย์อย่างเที่ยงตรงและเฉลยครบถ้วน และเฉลยขึ้นสำคัญถูกตรวจด้วยเครื่อง — ไล่นับ จำลอง หรือค้นจนถ้วนทั่ว — ก่อนที่ร้อยแก้วจะถูกเขียนห่อหุ้มมัน รายละเอียดอยู่ในบันทึกท้ายเล่ม ตรงไหนที่ความแน่นอนหมดระยะ ตัวบทจะบอก พาราด็อกซ์ชื่อดังหนึ่งข้อในหน้ากระดาษเหล่านี้ถูกนำเสนอตามที่มันเป็นจริง ๆ: ยังเปิดอยู่

ประวัติศาสตร์ที่ซื่อสัตย์ อดีตของวงการนี้มีทั้งการขโมยและการกุเรื่อง และบันทึกในเล่มนี้กล่าวมันอย่างตรงไปตรงมา การฉ้อฉลปริศนาที่อื้อฉาวที่สุดในประวัติศาสตร์อเมริกาถูกเล่าเต็ม ๆ ในบทที่ 2 "ปริศนาของ Einstein" ที่เวียนว่ายอยู่ในอินเทอร์เน็ตไม่ได้เขียนโดย Einstein คนไหนทั้งสิ้น ตรงไหนที่เกร็ดเล่าชวนอันเป็นที่รักเป็นเพียงตำนานแต่งเติม มันถูกตีตป่ายว่าตำนาน การเล่นปริศนาคือเกมของความจริงเป๊ะ ๆ ประวัติศาสตร์ของมันสมควรได้มาตรฐานเดียวกัน

เหล่าทำคิด ปริศนาทุกข้อจบด้วยการตั้งชื่อแพตเทิร์นใช้ซ้ำได้ทีมันสอน ทำราวสามสิบทำครอบคลุมทั้งสารบบ และพวกมัน — ไม่ใช่ตัวปริศนา — คือสัมภาระที่แท้จริง พวกมันคือสิ่งที่ถ่ายโอนไปถึงห้องดีบั๊ก การวินิจฉัยโรค โต๊ะเจรจา ภาคผนวก ก ทำดัชนีไว้ครบทุกทำ

โปรแกรมฝึก ภาค V แปลงทั้งหมดเป็นการฝึกที่คุณลงมือได้จริง — หลักสูตรสามสิบวันโดสประคองฝีมือ และตัววัดความคืบหน้าที่เชื่อถือตรง

หนังสือเล่มนี้ปฏิเสธอะไร

ไม่มีมนตร์ขลัง และไม่มียาแก้สารพัดโรค อุตสาหกรรมเกมฝึกสมองเชิงพาณิชย์สร้างตัวขึ้นบนคำอ้างว่าการฝึกปริศนาทำให้คุณฉลาดขึ้นโดยรวม หลักฐานที่ดีที่สุดบอกว่างานที่ฝึกพัฒนางานที่ฝึก และปฏิกิริยาส่วนใหญ่หยุดอยู่แค่นั้น Δ — ภาคผนวก ข คือสุสานเต็มรูปแบบของมายาคติแห่งการคิด ข้อนั้นรวมอยู่ด้วย หนังสือเล่มนี้อ้างสิ่งที่แคบกว่า และแตกต่างได้มากกว่า: แพตเทิร์นเฉพาะเจาะจง เรียกชื่อได้ เรียนได้จากปริศนา ซึ่งถ่ายโอนไปได้ไกลเท่าที่คุณตั้งใจแบกมันไป — พร้อมบัญชีที่มองตาไม่กะพริบว่าแพตเทิร์นชุดไหนสำคัญขึ้น ไม่ใช่ข้อย่อยลง เมื่อเครื่องจักรเร่งขึ้น

มันยังปฏิเสธความยากที่ปรุงแต่ง คุณจะไม่พบ "มีเพียง 2% ของคนทั้งโลกที่แก้ข้อนี้ได้" ในหน้าไหนของเล่มนี้ ตัวเลขนั้นเป็นการตลาดมาแต่ไหนแต่ไร ถูกเย็บติดเข้ากับปริศนานิตยสารหลายทศวรรษหลังจากมันตีพิมพ์ ความยากในเล่มนี้ให้เกรดเป็นดาว และได้ดาวมาอย่างสุจริต ถ้าอะไรง่าย มันจะบอกว่าง่าย ถ้าอะไรกินเวลาคณิตศาสตร์ไปหนึ่งศตวรรษกว่าจะปิดคดี มันก็จะบอกเช่นกัน

เดิมพัน

ไหวพริบถูกทดสอบที่หน้าประตูเสมอมา บทถัดไปเปิดจาก ณ ประตูที่เลื่องชื่อที่สุดในบรรดาทั้งหมด ที่ซึ่งสุรรางสิงโตนั่งอยู่ข้างถนนสายเดียวที่เข้าเมืองได้ และถามผู้เดินทางหนึ่งคำถาม ตอบผิดคือความตาย คำถามนั้นยังคุ้มค่าแก่การถาม — คุณจะพบมันในหน้าแรกของบทที่ 1 และจะไม่พบคำตอบของมันจนกว่าจะถึงบันทึกท้ายเล่ม ส่วนหนึ่งเป็นการหยอกเย้า ส่วนใหญ่เป็นคำสัญญา: หัวใจของปริศนาคำทายคือสภาวะที่มันพาคุณเข้าไปอยู่ ไม่ใช่พยางค์ที่ปลดปล่อยมัน จิตใจสี่พันปีหลงรักสภาวะนั้นมากพอที่จะสร้างประตูบานใหม่ขึ้นเรื่อย ๆ เพียงเพื่อความสุขของการได้ยืนอยู่หน้ามัน

ประตูเปิดแล้ว เชิญเข้ามารับการคัดแยก

ภาค I

สายธารปริศนา



บทที่ 1

ปริศนาหน้าประตู

นอกเมือง Thebes (ธีบส์) บนโคดหินข้างถนนสายเดียวที่เข้าเมืองได้ มีสุรตนหนึ่งนั่งอยู่: ร่างสิงโต ปีกอินทรี ใบหน้าหญิงสาว นางหยุดผู้เดินทางทุกคนและถามหนึ่งคำถาม ตอบผิด นางฆ่าทั้ง เมืองทั้งเมืองอดอยากอยู่เบื้องหลังนาง เพราะปริศนาหน้าประตูได้ปิดถนนเสียแล้ว

คำถามคือข้อนี้:

สิ่งใดเดินสี่ขาในยามเช้า สองขาในยามเที่ยง และสามขาในยามเย็น

กว่าเรื่องนี้จะถูกจดจารเป็นลายลักษณ์ — ถ้อยคำแท้ ๆ ของปริศนาข้อนี้ตกทอดถึงเรา ผ่านนักเขียนรุ่นหลังเท่านั้น หนึ่งในนั้นคือ Apollodorus — กริชได้ตัดสินใจไปแล้วว่า ปริศนาคำทายมีไว้ทำอะไร ไม่ใช่เพื่อความบันเทิง แต่เพื่อคัดแยก สฟิงซ์คือเครื่องกรองที่มีใบหน้า: หนึ่งคำถาม ออกแบบมาให้จิตใจที่คิดตามตัวอักษรเลื่อนไถลตกลงไปทั้งตัว โดยทุกสิ่งเดิมพันไว้กับคำตอบ คำถามทุกคำในนั้นคือกับดัก และเมื่อผู้เดินทางนาม Oedipus (อิดิปุส) ตอบได้ในที่สุด — เรื่องเล่าว่า — สฟิงซ์ก็เหวี่ยงร่างลงจากโคดหินและสิ้นชีพ ปริศนาที่ถูกใช้ไปแล้ว คือปริศนาที่ตายแล้ว

หนังสือเล่มนี้จะไม่ไขมันทั้งตรงนี้ คำตอบรออยู่ในบันทึกท้ายเล่ม แทบจะหน้าสุดท้าย ที่ซึ่งบัญชีทุกรายการถูกสะสาง ถ้าคุณยังไม่รู้คำตอบ อย่าไปค้นหา — ตอนนี้คุณครอบครองสิ่งที่หายากยิ่งกว่าเฉลย: ปริศนาที่ยังมีชีวิต ข้อที่เก่าแก่ที่สุดเท่าที่โลกมี จงนั่งอยู่กับอาการคัน อาการคันนั้นแหละคือหัวใจของหนังสือเล่มนี้

สิ่งที่สำคัญสำหรับบทนี้คือรูปทรงของฉาก: จิตใจหนึ่งดวง ประตูหนึ่งบาน และคำถามหนึ่งข้อยืนขวางกลาง นั่นคืองานที่เก่าแก่ที่สุดที่ปริศนาทำ นานก่อนจะเป็นงานอดิเรก พวกมันคือบททดสอบคุณค่าของคน สิ่งที่มาจากนี้จะพาเดินผ่านยี่สิบเจ็ดศตวรรษแรกของสายตระกูล — มุกตลกของอาลักษณ์ ข้อโต้แย้งที่ฆ่าคนได้ กระดองเต่า การนับพลของแม่ทัพ สมุดแบบฝึกหัดของนักบวช ตำราของพ่อค้า — และเฝ้าดูแต่ละชั้นชั้น นี้อุดมการณ์ถาวรขึ้นใหม่เข้ากับโรงยิมของจิตใจ

มุกตลกของอาลักษณ์

ปริศนาที่เก่าแก่ที่สุดที่เราอ่านได้ อยู่รอดมาด้วยบุญของทรายแห้ง ราว 1550 ปีก่อนคริสตกาล อาลักษณ์ชาวอียิปต์ชื่อ Ahmes (อาห์เมส) คัดลอกม้วนตำราคณิตศาสตร์ — ซึ่งตัวมันเอง เขานับถือไว้ คัดจากตำราที่เก่ากว่านั้นราวสองศตวรรษ — เติมไปด้วยเนื้อหางานอาชีพอันเคร่งขรึม: ส่วนแบ่งข้าว เลขคณิตขนมปังและเบียร์ ความชันของพีระมิด แล้วก็มีโจทย์ข้อ 79 ซึ่งไม่เคร่งขรึมกับอะไรเลยสักอย่าง บ้านเจ็ดหลัง แต่ละหลังมีแมวเจ็ดตัว แมวแต่ละตัวฆ่าหนูเจ็ดตัว หนูแต่ละตัวจะได้กินรวงข้าวสเปลด์เจ็ดรวง รวงแต่ละรวงจะให้ข้าวเจ็ดเฮกต์ Ahmes วังขึ้นบันได — 7, 49, 343, 2,401, 16,807 — แล้วรวมยอด: 19,607

ไม่มียุ่งฉางไหนต้องการตัวเลขนั้น ไม่มีเหตุผลทางธุรการใดบนโลกที่ต้องคูณแมว โจทย์ข้อ 79 คืออนุกรมเรขาคณิตสามชุดแพนซี เลขคณิตที่เพื่อความสุขของการไต่ที่สูง และมันปักหมุดข้อเท็จจริงที่ควรหยุดพินิจ: การเล่นกับนามธรรมนั้นเก่าแก่พอ ๆ กับการเขียนหนังสือ นับแต่วินาทีที่มนุษย์ครอบครองเครื่องมือสำหรับคิด บางคนก็เริ่มเอามันมาเล่นทันที — และการเล่นนั้น ไม่ใช่ปัญญาขี้ข้าว คือสิ่งที่เราขี้ข้านั่งแก๊กันอยู่สามสิบหกศตวรรษให้หลัง

จำ Ahmes กับเลขเจ็ดของเขาไว้ให้ดี ทั้งคู่จะกลับมาก่อนบทนี้จบ

เครื่องยนต์พาราไดออกซ์

ราว 450 ปีก่อนคริสตกาล ในเมือง Elea ของกรีก Zeno (เซโน) สร้างปริศนาชนิดที่น่าขนลุกกว่า: ข้อโต้แย้ง Achilles (อคิลลีส) มนุษย์ที่วิ่งเร็วที่สุด ยอมให้เต่าออกตัวนำ กว่าเขาจะไปถึงจุดที่เต่าเริ่มต้น เต่าก็คลานล้าหน้าไปแล้ว กว่าเขาจะปิดช่องว่างนั้น เต่าก็คลานต่อไปอีก แล้วก็อย่างนั้นเรื่อยไป ไม่มีที่สิ้นสุด แต่ละขั้นของข้อโต้แย้งด้านทานไม่ได้ ข้อสรุป — นักวิ่งที่เร็วที่สุดไม่มีวันแซงตัวที่ช้าที่สุด — เหลวไหลลื่นดี ทวิภาคของ Zeno ยิ่งร้ายกว่า: จะข้ามห้องคุณต้องข้ามครึ่งห้องก่อน และก่อนหน้านั้น ครึ่งของครึ่ง การเคลื่อนที่จึงเริ่มต้นไม่ได้ด้วยซ้ำ

ปริศนาคำทายฆ่าคุณที่หน้าประตู พาราไดออกซ์ย้ายเข้ามาอยู่ในบ้านคุณ ข้อโต้แย้งของ Zeno สลัดคำแย้งเชิงสามัญสำนึกทุกข้อทิ้งอยู่ราว 2,300 ปี จนกระทั่งคณิตศาสตร์สร้างลิมิตและอนุกรมลู่เข้าขึ้นมาอย่างจริงจัง — กลไกที่ทำให้กองชิ้นตอนอนันต์รวมกันได้เป็น

การเดินทางหนึ่งเที่ยว ซึมซับตัวเลขนั้นสักครู่: ปริศนาข้อนี้อายุนกว่าอารยธรรมที่ตั้งมัน ยืนกว่าอีกโหลอารยธรรมถัดจากนั้น และนั่งรอสภาพ ตอบไม่ได้ จนกว่าแคลคูลัสจะถูกประดิษฐ์ขึ้น และนั่นคือบทเรียนที่พาราไดออกซ์ชั้นดีสอน และมันไม่เกี่ยวอะไรกับเต๋าเลย: พาราไดออกซ์ที่ไม่ยอมตาย ซึ่พิกัดอย่างแม่นยำยิ่ง ตรงจุดที่แนวคิดหนึ่งยังขาดหายไป ความอึดอัดคือพิกัดบนแผนที่ ไม่ใช่ความผิดปกติ หนังสือเล่มนี้จะพบพาราไดออกซ์ทำงานร้งวัดแบบเดียวกันในความน่าจะเป็นและในตรรกศาสตร์ และจะปฏิบัติต่อทุกข้อแบบเดียวกัน: ไม่ใช่ตัวทวนใจ แต่คือหุมดรงวัดที่ตกลงบนผืนดินที่ยังไม่มีใครทำแผนที่

ของขวัญจากเต๋า

ตำนานจีนเล่าว่าเต๋าทัวหนึ่งคลานขึ้นจากแม่น้ำ Luo (ลั่ว) พร้อมลวดลายจุดบนกระดอง ไม่ว่าแท้จริงมันเริ่มต้นอย่างไร — ตัวตำนานนั้นโบราณ ตำราเก่าแก่ที่สุดที่หลงเหลือซึ่งบันทึกจัตุรัสนี้ตกอยู่ยุคราชวงศ์ฮั่น — ตัววัตถุคือเลขเก้าตัวในตารางสามคูณสาม: 4, 9, 2 แถวบน; 3, 5, 7 แถวกลาง; 8, 1, 6 แถวล่าง ทุกแถว ทุกหลัก และเส้นทแยงทั้งสอง รวมได้ 15 ตัวเลข 1 ถึง 9 ปรากฏตัวละหนึ่งครั้งพอดี นี่คือ Lo Shu (ไหลวชู) จัตุรัสกลบรรพบุรุษ และโดยแก่นแล้วมันมีหนึ่งเดียว — จัตุรัสกล 3x3 ทุกอันที่ใช้ 1 ถึง 9 ก็คืออันนี้ หมุนหรือพลิกกระจกเอา

ความเพิลิตเพิลินระดับผิวคือการจัดให้เข้าเงื่อนไข: เลขเก้าตัว เส้นแปดเส้น การจัดวางหนึ่งเดียวที่เชื่อฟังทั้งหมดพร้อมกัน แต่ที่ซ่อนอยู่ข้างในคือความคิดที่ลึกกว่า เลข 15 ไม่ใช่ของประดับ มันคือความจำเป็น เลขทั้งเก้ารวมกันได้ 45 และสามแถวต้องแบ่งยอดนั้นเท่า ๆ กัน — ดังนั้นทุกเส้นถูกบังคับให้เป็น 15 ตั้งแต่ก่อนเลขตัวแรกจะถูกลงเสียอีก จงหาปริมาณที่ต้องคงอยู่ไม่ว่าจะจัดวางอย่างไร แล้วคุณจะรู้เรื่องราวของการจัดวางที่คุณไม่เคยแม้แต่จะจินา นี่คือ**ปริมาณไม่แปรเปลี่ยน (invariant)** ตัวแรกของสายตระกูล — ความคิดที่ถ่ายโอนได้ไกลที่สุดนี้ในหนังสือเล่มนี้ และบทนี้จะไม่ใช่ที่สุดท้ายที่มันกักจนเห็นเลือด

ทายาทของ Lo Shu สืบสายลึกลับสองศตวรรษ ชูโดกุคือหนึ่งในนั้น บทที่ 3 จะรับช่วงเรื่องนั้นต่อ

ของเล่นของชายชรา

Archimedes (อาร์คิมิดีส) แห่ง Syracuse ใช้ชั่วโมงที่ร่ำรวยแรงที่สุดของชีวิตกับเครื่องจักรสงคราม และ — บันทึกชวนให้เชื่อ — ใช้ชั่วโมงที่มีความสุขที่สุดกับของเล่น สองชิ้นรอดมาถึงเรา และทั้งคู่ยังลึกกว่าแทบทุกสิ่งในโลกโบราณ

ชิ้นแรก Stomachion: ชิ้นส่วนแบนสิบสี่ชิ้นประกอบกันเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัส สองพันปีมันดูเป็นเพียงของเล่นเด็ก แล้วการอ่านซ้ำ Archimedes Palimpsest — หนังสือสวดมนต์ยุคกลางที่แผ่นหนังถูกขูดลบแต่ยังคงตัวบทนิพนธ์ของเขาไว้อย่าง ๑ — ก็เผยสิ่งที่เขาน่าจะถามอยู่จริง ๆ: ชิ้นส่วนสิบสี่ชิ้นประกอบเป็นจัตุรัสได้กี่วิธี ไม่ใช่ได้หรือไม่ แต่ที่วิธี การนับรูปแบบการจัดวาง ถูกปฏิบัติเป็นคณิตศาสตร์ — คอมบินาทอริกส์ ล้าเวลามาสองสหัสวรรษ คำตอบต้องรอถึงปี 2003 เมื่อ Bill Cutler ปิดคดีด้วยคอมพิวเตอร์: 17,152

ของเล่นชิ้นที่สองมาถึงในรูปบทกวี: โจทย์ฝูงวัว (Cattle Problem) บทร้อยกรองที่ส่งถึง Eratosthenes บรรณารักษ์แห่ง Alexandria จงคำนวณขนาดของฝูงปศุสัตว์แห่งสุริยเทพ มันเปิดเรื่อง แล้วคลี่เงื่อนไขฟังกูไรพิชภัยออกมาเป็นสายน้ำตก ว่าด้วยวัวตัวผู้และวัวตัวเมียสีขาว ดำ ดำ และน้ำตาล เงื่อนไขทั้งหมดบีบอัดลงเป็นสิ่งที่ปัจจุบันเราเรียกว่า สมการ Pell และฝูงที่เล็กที่สุดที่เข้าเงื่อนไขครบทุกข้อคือตัวเลขยาว 206,545 หลัก มันไม่ถูกเขียนออกมาเต็ม ๆ จนกระทั่งปี 1965 โดยเครื่องจักร โจทย์ยุ่งเหยิง ตั้งเป็นคำท้าทายระหว่างนักปราชญ์ บรรจรวัวไว้มากกว่าจำนวนอะตอมในเอกภพที่สังเกตได้

บทเรียนคู่ของ Archimedes คืออุปกรณ์ถาวรของห้องนี้: การนับการจัดวางคือคณิตศาสตร์ของจริง และปริศนาที่ตั้งได้ง่าย ๆ อาจลึกในระดับดาราศาสตร์ ผิดที่เรียบง่ายไม่บอกอะไรเลยเรื่องความลึก — คำเตือนที่หนังสือเล่มนี้จะทวนซ้ำในทุกศตวรรษ

ปัจฉิมลิขิตหนึ่งชิ้นอยู่ในตระกูลเดียวกัน แทนแกรม — เจ็ดชิ้น หนึ่งจัตุรัส เจาทรงนับไม่ถ้วน — แผ่รังสีกลืนอายุเงินโบราณ และประวัติศาสตร์ฉบับชาวบ้านก็มอบวงศาวนพันปีให้มันมานาน ความซื่อสัตย์บังคับให้แก้ให้ถูก: ร่องรอยที่มีหลักฐานของมันเริ่มต้นราวปี 1800 เท่านั้น ในจีน จากนั้นข้ามไปยุโรปและอเมริกาภายในสองทศวรรษ และจุดชนวนกระแสลัทธิปริศนาระดับนานาชาติครั้งแรก ๆ ของโลก การเล่นตัดแบ่งรูปทรงจึงประกบหัวท้ายประวัติศาสตร์ทั้งสายนี้ — เก้าแก่แท้จริงใน Syracuse ตีตราใหม่เอี่ยมในจีนยุคราชวงศ์ชิง — และความกระหายที่มันหล่อเลี้ยงไม่เคยเปลี่ยน: ชิ้นส่วนชุดเดิม มองเสียใหม่ กลายเป็นสิ่งอื่น

กลเศษเหลือ

ตำราเลขจีนสมัยศตวรรษที่สี่หรือห้า Sunzi Suanjing ตั้งโจทย์ที่ฟังเหมือนบัญญัติเมืองเล็ก ๆ: มีของจำนวนหนึ่งที่เราไม่รู้จำนวน นับที่ละสามเหลือเศษสอง นับที่ละห้าเหลือเศษสาม นับที่เจ็ดเหลือเศษสอง ของมีกี่ชิ้น คำตอบเล็กที่สุดคือ 23 ตำนานผูกวิธีนี้ไว้กับแม่ทัพ Han Xin (หานซิน) ผู้นำพลด้วยการสังหารเข้าแถวที่ละสาม ห้า และเจ็ด แล้วรายงาน เฉพาะเศษ — ยอดพลถูกเก็บเป็นความลับ แม้กระทั่งจากคนที่ถูกนับเอง

ท่าที่ซ่อนอยู่ใต้พื้นคือชุมทรัพย์: เมื่อทั้งก่อนรู้ไม่ได้ จงหันมันเป็นเศษที่รู้ได้ แล้วประกอบ กลับ สัญชาตญาณนั้นเติบโตใหญ่เป็นทฤษฎีบท — Chinese Remainder Theorem ตามที่ โลกเรียกกันทุกวันนี้ — และทฤษฎีบทที่เติบโตใหญ่เป็นโครงสร้างพื้นฐาน: การแยกส่วน แบบมอดูลาร์วิ่งอยู่ทุกวันนี้ในระบบเข้ารหัสที่เคลื่อนย้ายเงินของคุณ และนี่จะไม่ใช่วินาที สุดท้ายในสายตระกูลนี้ ที่ปริศนาคำทายเติบโตขึ้นไปเป็นเสารับน้ำหนัก

สมุดแบบฝึกหัดของนักบวช

ราวปี 800 ณ ราชสำนัก Charlemagne หัวหน้านักปราชญ์ของจักรพรรดิ — ธรรมเนียม ระบุชื่อ Alcuin of York และการระบุนี้ แม้ไม่แน่นอนหาไร้อย่างไร ก็เก่าแก่ — รวบรวมชุด โจทย์เลขคณิตภาษาละติน: ห้าสิบสามข้อในต้นฉบับส่วนใหญ่ ห้าสิบหกข้อในบางฉบับ ชื่อเรื่องของมันคือแถลงการณ์ Propositiones ad acuendos juvenes: โจทย์เพื่อลับ ยาวจนให้คม ไม่ใช่เพื่อให้พวกเขาเฟลิดเฟลิน เพื่อลับให้คม มันคือชุดรวมโจทย์ชุดแรก ในประวัติศาสตร์ที่พูดออกมาดัง ๆ ในสิ่งที่คนออกโจทย์ทุกคนนับแต่ Ahmes รู้อยู่แก่ใจ: ของพวกนี้คืออุปกรณ์ฝึกซ้อม

และการฝึกที่มันนำเสนออีกใหม่อย่างแท้จริง โจทย์ข้ามแม่น้ำในต้นฉบับนี้คือโจทย์วาง แผนเชิงปริภูมิสถานะชุดแรกเท่าที่มีบันทึก — โลกของสถานการณ์แบบไม่ต่อเนื่อง การ เดินที่ถูกกติกา และรูปแบบต้องห้าม — ตั้งขึ้นสิบเอ็ดศตวรรษครึ่งก่อนที่นักวิจัยปัญญา ประดิษฐ์จะนิยามคำว่า "search" แล้วค้นพบแนวโจทย์นี้ใหม่ในฐานะรากฐานของตนเอง สังเกตให้ดีกว่าความยากนี้เป็นชนิดไหน ไม่มีอะไรในโจทย์เหล่านี้ต้องใช้คณิตศาสตร์เกิน ระดับเด็ก ทุกอย่างในนั้นต้องใช้ความคิด ความยากอาศัยอยู่ในการมองให้ถูกรูปทั้งด้าน — ในการเห็นสถานการณ์เป็นเซตของสถานะ และเห็นเงื่อนไขบังคับเป็นกำแพง — และ นั่นเองคือเหตุผลที่การบ้านยุคการอแล็งเฌียงขึ้นหนึ่งยังให้ความรู้สึกร่วมสมัย

โจทย์ข้อ 18 ของชุดนี้คือปริศนาที่โด่งดังที่สุดในหนังสือเล่มนี้ มันลึบยาวจนให้คมมาแล้วหนึ่งพันสองร้อยปี และมันเป็นคือพิธีกรรมแรกของคุณ

★ 1 · หมาป่า แพะ กะหล่ำปลี

ชาวนาต้องพาหมาป่า แพะ และกะหล่ำปลีข้ามแม่น้ำ เรือบรรทุกได้เพียงชาวากับผู้โดยสารอีกหนึ่ง — หมาป่า แพะ หรือกะหล่ำปลี ถ้าถูกทิ้งไว้ด้วยกันตามลำพัง หมาป่ากินแพะ และแพะกินกะหล่ำปลี ทำอย่างไรทุกอย่างจึงจะถึงฝั่งโน้นครบถ้วนปลอดภัย

หยุดตรงนี้ แม่น้ำสายนี้รอมาสิบสองศตวรรษแล้ว รออีกสิบนาทีย่อมนได้

เฉลย. การเดินแรกถูกบังคับ แม้แทบไม่เคยรู้สึกเช่นนั้น พาหมาป่าข้ามก่อน แพะที่ถูกทิ้งไว้จะกินกะหล่ำปลี พากะหล่ำปลีข้ามก่อน หมาป่าจะกินแพะ มีการออกเรือเพียงแบบเดียวที่ทั้งสันติภาพไว้บนฝั่ง: **พาแพะไป** (เที่ยวที่ 1) — หมาป่ากับกะหล่ำปลีทนหน้ากันได้สบายมาก พายเรือกลับตัวเปล่า (2) คราวนี้พาผู้โดยสารที่เหลือตัวไหนก็ได้ สมมุติว่าหมาป่า (3) และตรงนี้เองที่ปริศนาแยกเขี้ยว: ปล่อยหมาป่าขึ้นฝั่งข้างแพะเท่ากับเสิร์ฟอาหารกลางวัน — เว้นแต่คุณจะทำสิ่งที่รู้สึกเหมือนความล้มเหลว นั่นคือ**พาแพะกลับมา**กับคุณด้วย (4) ตอนนี้อยู่ฝั่งโน้นมีหมาป่า อยู่ลำพังและปลอดภัย ฝั่งนี้มีคุณ แพะ และกะหล่ำปลี ทิ้งแพะไว้ พากะหล่ำปลีข้ามไป (5) — หมาป่ากับกะหล่ำปลี สงบสุขอีกครั้ง พายกลับตัวเปล่า (6) แล้วกลับไปรับแพะ (7)

จบในเจ็ดเที่ยวข้าม — และเจ็ดคือค่าต่ำสุด การค้นถ้วนทั่วทุกแผนที่เป็นไปได้ยืนยันเช่นนั้น และพบเส้นทางเหมาะที่สุดอีกเพียงหนึ่งเดียว: ภาพกระจกเงา ที่หมาป่ากับกะหล่ำปลีสลบลำดับกัน ทำไมแพะจึงต้องเป็นฝ่ายวิ่งรอก มองที่ตัวละคร หมาป่าขัดแย้งกับแพะเท่านั้น กะหล่ำปลีขัดแย้งกับแพะเท่านั้น แพะขัดแย้งกับทั้งคู่ — มันทั้งกินและถูกกิน มันคือคอกขวิด ผู้โดยสารหนึ่งเดียวที่ทิ้งไว้กับอะไรไม่ได้เลยไม่ว่าฝั่งไหน มันจึงเป็นตัวที่ต้องเดินทางไปกลับ และเที่ยวที่ 4 การเดินที่ไขปริศนา คือการเดินที่มีมือใหม่ปฏิเสธจะพิจารณา เพราะมันดูเหมือนการรื้อความคืบหน้าทิ้ง มันไม่ใช่ ความคืบหน้าที่นี้วัดกันในปริภูมิของสถานการณ์ ไม่ใช่ในสินค้าที่ส่งถึงแล้ว — และเส้นทางที่สั้นที่สุดผ่านปริภูมินั้นมีอยู่หนึ่งเที่ยวข้าม ที่วิ่งถอยหลัง

ทำ — ให้คอขวดวิ่งรอก. จังหวะองค์ประกอบที่ขัดแย้งกับทุกสิ่ง แล้วให้มันเป็นฝ่ายเดินทางไปกลับ ยอมรับการเดินทางที่ดูเหมือนการถอย แผนใดก็ตามที่ให้คะแนนกันด้วยสถานะแทนความคืบหน้าที่เราเห็น ล้วนทำงานแบบนี้ — การรีแฟกเตอร์ที่ทำให้โค้ดนำเกลียดลงชั่วคราว การเจรจาที่รื้อข้อตกลงที่ปิดแล้วหนึ่งข้อเพื่อปลดล็อกอีกสองข้อ ถอยหลังคือทิศทาง ไม่ใช่คำพิพากษา

ที่เหลือของสมุดแบบฝึกหัดเล่นบทแปรผัน: สามี่ซึ่งที่ไม่ยอมทั้งภรรยาไว้ในวงล้อมบุรุษอื่น เรื่องที่ใหญ่ขึ้น เงื่อนไขที่รัดแน่นขึ้น — เครื่องจักรเดิมในโยสถานะที่หนาขึ้น และจะสังเกตสิ่งที่ซื้อเรื่องสัญญาไว้แล้วส่งมอบจริง ไม่มีศิษย์คนไหนของ Alcuin จะได้พายเรือพาหมาป่าจริง ๆ ข้ามแม่น้ำ หมาป่าไม่เคยเป็นประเด็น กล้ามเนื้อการวางแผนต่างหากคือประเด็น หนึ่งพันสองร้อยปีให้หลัง เมื่อวิศวกรหญิงคนหนึ่งสอนหุ่นยนต์คลังสินค้าให้เรียงลำดับการเคลื่อนที่โดยไม่พลัดเข้าสถานะต้องห้ามแม้ครั้งเดียว เธอกำลังทำโจทย์ข้อ 18 ในสเกลอุตสาหกรรม

เซลส์แมนแห่งตัวเลข

ปี 1202 ชายหนุ่มจากเมือง Pisa ตีพิมพ์ตำราคณิตศาสตร์ที่มีโจทย์การขายซ่อนอยู่ Leonardo — ที่โลกเรียก Fibonacci (ฟีโบนัชชี) — เติบโตแถวสถานีการค้าของพ่อในแอฟริกาเหนือ ที่ซึ่งเขาได้เรียนตัวเลขฮินดู-อารบิก: เก้าหลักกับศูนย์ ระบุค่าตามตำแหน่งสร้างมาเพื่อการคำนวณ ขณะที่ยุโรปยังหารายด้วยเลขโรมัน ซึ่งจัดเป็นการบำเพ็ญทุกรกิริยาแขนงหนึ่ง Liber Abaci ของเขาจึงต้องเกลี้ยกล่อมพ่อค้าให้ละทิ้งระบบตัวเลขของบรรพบุรุษ

ข้อพิสูจน์แทบเขียนตัวเอง สำหรับใครก็ตามที่ยินดีลองคูณยาวด้วยตัว L หนึ่งตัว X สองตัว กับ I อีกกำมือ ปัญหาอยู่ที่ความเฉื่อย ธรรมเนียมของสมาคมช่าง และความหวาดระแวงต่อเลขศูนย์ที่ดูจะไม่มีคามหมายอะไรเลย เครื่องมือเกลี้ยกล่อมของเขา โดยส่วนใหญ่ จึงเป็น: ปริศนา ข้อที่โด่งดังถามว่าคู่กระต่ายทวีจำนวนอย่างไร — คูโตเต็มวัยแต่ละคู่ออกลูกใหม่หนึ่งคู่ทุกเดือน คู่แรกเกิดแต่ละคูโตเต็มวัยในหนึ่งเดือน — และสามะโนเดือนต่อเดือนวิ่งไป 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 แต่ละพจน์คือผลบวกของสองพจน์ก่อนหน้า การเติบโต จับใส่ความสัมพันธ์เวียนเกิด: ลำดับที่บัดนี้แบกชื่อของเขาไปทั่วคณิตศาสตร์และครึ่งหนึ่งของวิทยาศาสตร์ทั้งมวล เริ่มต้นชีวิตเป็นโจทย์เลขเรื่องกระต่าย และที่อื่นใน

แบบฝึกหัดของเขา มีเพื่อนเก่านั่งอยู่: หญิงชราเจ็ดคนบนถนนสู่กรุงโรม แต่ละคนมีล่อเจ็ดตัว ล่อแต่ละตัวแบกกระสอบเจ็ดใบ แต่ละกระสอบ ขนมปังเจ็ดก้อน บันไดเลขเจ็ดของ Ahmes ยี่สิบเจ็ดศตวรรษให้หลัง ยังไต่ต่อไป อีกห้าศตวรรษ มันจะกลายเป็นกลอนอังกฤษว่าด้วยชายที่พบกันบนถนนสู่ St Ives ปริศนาชั้นดีคือมีมที่มีครึ่งชีวิตยาวสามพันปี

สิ่งที่ Fibonacci ให้โรงยิมนั้นมึนหมิ่นอย่างเจ็บช้ำ: ระบบบันทึกคือเครื่องมือคิดและปริศนาคือฝ่ายการตลาดของมัน ผู้คนไม่เปลี่ยนวิธีเขียนแทนเพราะคุณเทศนา พวกเขาเปลี่ยนเพราะวิธีใหม่ทำให้เรื่องน่ารื่นรมย์กลายเป็นเรื่องง่าย ตัวเลขชนะ กระต่ายมีส่วนช่วย

ประตู คุณทวี

ลองนับอุปกรณ์ที่ถูกติดตั้งตลอดยี่สิบเจ็ดศตวรรษนี้ดู การเล่นอนุกรม จากอาลักษณ์ผู้มีอารมณ์ขัน พาราไดออกซ์ พลัสสัญญาณที่ถูกยิงเหนือแนวคิดที่ยังขาดหาย ปริมาณไม่แปรเปลี่ยน ของขวัญจากเต่า การนับเชิงลึก จากของเล่นของชายชรา การแยกส่วนมอดูลาร์จากแม่ทัพผู้ไม่ยอมเปิดเผยยอดพล การวางแผนปริภูมิสถานะ จากนักบวชผู้เขียนคำว่า "ลับให้คม" และหมายความตามนั้นจริง ความสัมพันธ์เวียนเกิด ชายโดยกระต่าย ไม่มีชั้นไหนหมดอายุ ทุกท่าในรายการนี้จะถูกเรียกหาจากคุณอีกครั้ง ในชุดแฟนซีใหม่ ก่อนหนังสือเล่มนี้จบ

เบื้องหน้า สายตระกูลทั้งต้นฉบับลายมือไปหาแท่นพิมพ์ และกลายเป็นอุตสาหกรรม — ชื่อผู้เขียน กระแสคลั่ง เงินรางวัล และการฉ้อฉลครั้งใหญ่ครั้งแรกของวงการ ของเล่นไม้ของนายไปรษณีย์คนหนึ่งจะทำให้สองทวีปเป็นอัมพาตไปหนึ่งฤดูกาล เงินรางวัลหนึ่งพันดอลลาร์จะนั่งอยู่อย่างปลอดภัยสมบูรณ์หลังกำแพงเลขคณิต และอัจฉริยะเสียงดังที่สุดของยุคจะกลายเป็นคนขโมยเครดิตขึ้นโด่งดังที่สุดของตัวเอง ป้ายบอกทางหนึ่งป้ายสำหรับถนนสายไกล: ห้าศตวรรษหลัง Fibonacci ในปี 1736 คำถามเรื่องเปื่อยของนักเดินเล่น ว่าด้วยการข้ามสะพานทั้งเจ็ดแห่ง Königsberg โดยไม่ข้ามสะพานเดิม จะยื่นท่าก่อตั้งของการแก้ปัญหายุ่งยากใหม่ให้แก่ Leonhard Euler (เลออนฮาร์ด ออยเลอร์) — โยนทุกอย่างทิ้งยกเว้นโครงสร้าง — และแถมกำเนิดทฤษฎีกราฟให้โลกไปด้วยในคราวเดียว เรื่องนั้นเล่าไว้เต็ม ๆ ในบทที่ 11

ส่วนสฟิงซ์ยังนั่งอยู่บนโขดหินของนาง และคำถามของนางยังเปิดค้างอยู่บนโต๊ะของคุณ
เช้า เทียง เย็น สี สอง สาม ระหว่างตรงนี้กับบันทึกท้ายเล่ม มีการฝึกทั้งเล่มคั่นกลางอยู่
จงใช้มัน

บทที่ 2

ยุคทองของนักปริศนา

สามพันปีแรกของมัน ปริศนาเดินทางจากมือสู่มือ — พาไพรัสสู่ม้วนหนัง ม้วนหนังสู่แผ่นเวลล์มของอาราม — ด้วยความเร็วของน้ำหมึกและโซค แล้วยุโรปก็สร้างแท่นพิมพ์ ตามด้วยแท่นพิมพ์ไอน้ำ หนังสือพิมพ์ราคาเพนนิ และรถไฟขานเมือง และปริศนาก็ค้นพบว่าตัวเองทำอะไรได้บ้างเมื่อมีผู้ขมนับล้าน ระหว่างปี 1612 ถึง 1945 วงการนี้ได้ครอบครองทุกสิ่งที่เราคิดว่าเป็นของสมัยใหม่: หนังสือและชื่อผู้เขียน คอลัมน์และกระแสดังเงินรางวัลและการลอกเลียน และท้ายที่สุด ความน่าเชื่อถือทางวิทยาศาสตร์ มันยังจัดแสดงผลมธรรมสอนใจสองเรื่อง — การฉ้อฉลที่หลอกคนทั้งโลกได้หนึ่งศตวรรษ และการสาธิตหมู่ว่าความพยายามเอาชนะเลขคณิตไม่ได้ บทนี้คือเรื่องราวของยุคนั้น เล่าผ่านผู้คนที่สร้างมันขึ้นมา

ชั้นหนังสือ

มันเริ่มต้น อย่างถูกต้องตามครรลอง ด้วยหนังสือ ปี 1612 Claude-Gaspard Bachet ตีพิมพ์ *Problèmes plaisants et délectables* — "โจทย์อันรื่นรมย์และน่าอภิรมย์" — หนังสือคณิตศาสตร์สั้นทนาการแท้จริงเล่มแรก: กลตัวเลข เกมคัดออกสไตส์ Josephus และคำถามเรื่องลูกตุ้มน้ำหนักที่ถ่อมตัวอย่างหลอกล่อ ด้วยลูกตุ้มเพียงสี่ลูก — 1, 3, 9 และ 27 ปอนด์ — กับตาชั่งสองจานซึ่งลูกตุ้มวางได้ทั้งสองจาน คุณชั่งของหนักจำนวนเต็มปอนด์ได้ทุกค่าตั้งแต่ 1 ถึง 40 ในผลงานเลี้ยงชื่อนั้นซ่อนเลขคณิตฐานสาม ลักลอบเข้าหัวผู้อ่านในคราบการคำนวณร้าน ของขวัญชิ้นลึกลับกว่าของ Bachet คือการก่อร่างสารบบ: บัดนี้ปริศนามีที่ไปที่ไป — ใครตั้งอะไร เมื่อไร — ซึ่งเป็นสิ่งที่ยุคถัดมาจะเรียนรู้ที่จะปลอมพอดิบพอดิ (Bachet คนเดียวกันนี้คือบรรณาธิการฉบับพิมพ์ Diophantus เล่มที่ Fermat จะเขียนหมายเหตุที่โด่งดังที่สุดในคณิตศาสตร์ลงบนขอบกระดาษ)

ปี 1694 Jacques Ozanam ตามมาด้วย *Récréations mathématiques et physiques* สี่เล่มจบ — ชั้นสารานุกรม แหล่งอ้างอิงที่หล่อเลี้ยงนักเขียนปริศนาแห่งศตวรรษที่สิบเก้าทุกคน คลังแสงถูกเติมเต็มและจัดขึ้นชั้นเรียบร้อย สิ่งที่ยังขาดคือขบวนการยักยัดคือขบวนการระเบิด และ

การพิมพ์เชิงอุตสาหกรรมก็จัดหามาให้: กระดาษราคาถูก การรู้หนังสือระดับมวลชน และหนังสือพิมพ์รายวันที่หิวกระหายทุกสิ่งที่ทำให้ผู้อ่านควักเงินซื้อฉบับพรั่งนี้

ในฤดูหนาวปี 1880 โลกได้รู้ว่าส่วนผสมนั้นทำอะไรได้บ้าง

กระแสลั่ง

ราวปี 1874 Noyes Palmer Chapman นายไปรษณีย์แห่งเมือง Canastota รัฐ New York ประกอบถาดไม้ใบเล็กบรรจุบล็อกเลื่อนสลับห้าชิ้นติดหมายเลข กับช่องว่างหนึ่งช่อง มันเดินทางเจียบ ๆ อยู่สองสามปี — เพื่อนฝูง ครอบครัว สำเนาไม่กี่ชุด — แล้วในเดือนมกราคม 1880 มันก็ระเบิดขึ้นราวดินปืน สี่เดือนเต็ม รวมกราคมถึงเมษายน 15 Puzzle คือกระแสลั่งระดับโลก: ถูกเล่นกันในห้องรับแขก ที่ทำงาน และหอบรรยายทั่วอเมริกา และยุโรป ถูกบทบรรณาธิการรวมประณาม ถูกกล่าวโทษว่าพลาญวันทำงาน Chapman ยื่นจดสิทธิบัตรเอาเดือนมีนาคมปีนั้นเอง ขณะคลื่นกำลังขึ้นถึงยอด

เครื่องยนต์ของความคลั่งคือคำทำเฉพาะข้อหนึ่ง จัดกระดานให้เรียงตามลำดับ แต่สลับขึ้น 14 กับ 15 ไว้ แล้วเลื่อนจนทุกอย่างอ่านได้ถูกต้อง เงินรางวัลหนึ่งพันดอลลาร์ถูกผูกติดกับมัน — ข้อเสนอที่ผู้ป่าวประกาศเสียงดังและยาวนานที่สุดคือนักโซว์ปริศนาชาวอเมริกันนาม Sam Loyd ชื่อที่ควรจดจำไว้ให้มัน ผู้คนนับล้านเลื่อนชิ้นไม้ ทรัพยากรสมบัติแห่งความสนใจถูกพลาญไป และตลอดเวลานั้น ประตูกถูกกลองอยู่ก่อนแล้ว: ในปี 1879–80 ใน American Journal of Mathematics นักคณิตศาสตร์สองคนชื่อ Johnson และ Story พิสูจน์ว่าคำทำนั้นเป็นไปได้ ไม่ใช่ยังไม่มีใครแก้ได้ — เป็นไปไม่ได้ แบบเดียวกับที่ห้าเป็นเลขคู่ไม่ได้

มันเป็นพิธีกรรมข้อถัดไปของหนังสือเล่มนี้ และมันได้สามดาวมาอย่างสุจริต: ตัวปริศนาไม่ใช้การหาคำตอบ แต่คือการเห็น ด้วยความแน่นอน ว่าทำไมคำตอบจึงไม่มีอยู่

★★★ 38 • ปริศนา 14-15

ถาด 4×4 บรรจุชิ้นเลื่อนสลับห้าชิ้น หมายเลข 1–15 กับช่องว่างหนึ่งช่อง การเดินหนึ่งครั้งคือเลื่อนชิ้นที่ติดกับช่องว่างเข้าไปแทนที่ ในกระดานที่เรียงเสร็จ ขึ้นอ่านได้ 1 ถึง 15 ตามลำดับ ซ้ายไปขวา บนลงล่าง ช่องว่างอยู่ท้ายสุด ตรงมุมขวาล่าง คุณได้รับกระดาน

ที่เกือบเสร็จ: ทุกชั้นเข้าที่ ยกเว้น 14 กับ 15 ที่สลับตำแหน่งกัน จึงคืนความเรียบร้อย สมบูรณ์ด้วยการเลื่อนเท่านั้น Sam Loyd เสนอ \$1,000 สำหรับคำตอบ คุณควรลองไหม
หยุดตรงนี้ อย่างน้อยจงตัดสินใจว่าหลักฐานชนิดใดจะปิดคำถามนี้ได้

เฉลย. อย่าลอง ไม่มีลำดับการเดินใดสำเร็จ — และบทพิสูจน์ไม่ตรวจสอบลำดับการเดิน แม้แต่ลำดับเดียว

นับช่องว่างเป็นชั้นฝึลำดับที่สับหก ตำแหน่งใด ๆ ของกระดานจึงเป็นการจัดเรียงสับหก ชั้นในสับหกช่อง และการเดินทุกครั้งคือหนึ่งการสลับ: ช่องว่างแลกที่กับชั้นข้างเคียง คราวนี้จึงติดตามปริมาณทางบัญชีสองตัว

ตัวแรก ภาวะคู่คี่ของการจัดเรียง ข้อเท็จจริงพื้นฐานว่าด้วยการจัดเรียง: การสลับสองชั้น หนึ่งครั้งพลิกการจัดเรียงระหว่าง "คู่" กับ "คี่" เสมอ — โดยคู่หมายถึงไปถึงได้จากลำดับ เรียงเสร็จด้วยจำนวนการสลับที่เป็นเลขคู่ คี่หมายถึงเลขคี่ (ลำดับของการสลับไม่สำคัญ ภาวะคู่คี่ของจำนวนครั้งนั้นตายตัว) ในเมื่อการเดินทุกครั้งคือการสลับหนึ่งครั้งพอดี ภาวะคู่คี่ของการจัดเรียงจึงพลิกทุกการเดิน

ตัวที่สอง ระยะของช่องว่างจากบ้าน นับเป็นก้าวบนตาราง (จำนวนแถวบวกจำนวนหลัก ที่ห่างจากมุมขวาล่าง) การเดินทุกครั้งลากช่องว่างขึ้น ลง ซ้าย หรือขวาหนึ่งก้าว ระยะนี้ จึงเปลี่ยน ± 1 พอดีต่อการเดิน: ภาวะคู่คี่ของมันก็พลิกทุกการเดินเช่นกัน

ไฟสองดวง กะพริบพร้อมเพรียงกันสนิท ฉะนั้นจงพิจารณาผลบวกของทั้งคู่ การเดิน แต่ละครั้งพลิกภาวะคู่คี่ทั้งสองพร้อมกัน และการพลิกทั้งคู่ทั้งภาวะคู่คี่ของผลบวกไว้ไม่ เปลี่ยน — ผลบวกมอดุโล 2 คือปริมาณไม่แปรเปลี่ยน: ไม่มีการเดินถูกกติกาใด และดังนั้น ไม่มีลำดับการเดินถูกกติกาใด จะยาวหรือแบายลเพียงไร ที่จะต้องมันได้

คราวนี้ประเมินกระดานทั้งสอง กระดานเรียงเสร็จ: ศูนย์การสลับจากตัวมันเอง (คู่) ช่องว่างอยู่บ้าน ระยะศูนย์ (คู่) คู่บวกคู่ — ปริมาณไม่แปรเปลี่ยนอ่านค่าได้คู่ กระดานซิง รางวัล: ห่างจากเรียงเสร็จหนึ่งการสลับพอดี — 14 กับ 15 แลกที่กัน — การจัดเรียงจึงคือ ขณะที่ช่องว่างอยู่บ้าน (คู่) คี่บวกคู่ — ปริมาณไม่แปรเปลี่ยนอ่านค่าได้คี่ คู่ไม่มีวันกลายเป็นคี่ภายใต้การเดินที่อนุรักษ์ผลบวก ตำแหน่งซิงรางวัลจึงไปถึงไม่ได้ นักแก่นับล้านทุกคนกำลังเลื่อนชั้นไม้วนเวียนอยู่ในครึ่งเดียวของเอกภพ ซึ่งอีกครั้งพวกเขาไม่มีวันย่างเข้าไปได้: การจัดเรียงที่ไปถึงได้จากกระดานเรียงเสร็จมีพอดีครึ่งหนึ่งของทั้งหมด — $16!/2$

แบบ รวาลับล้านล้าน — และทฤษฎีบทนี้ตรวจสอบได้ถ้วนทั่วในฉบับจิ๋ว: บนภาคของเล่น 2x2 การจัดเรียง 24 แบบไปถึงได้จริงเพียง 12 แบบพอดี

เงินหนึ่งพันดอลลาร์ของ Loyd ปลอดภัยอย่างสมบูรณ์แบบ เขารู้้อยู่แก่ใจ

ทำ — พิสูจน์ความเป็นไปไม่ได้ด้วยปริมาณไม่แปรเปลี่ยน. ก่อนกัมหนับดกับ โจทย์การแปลงสภาพใด ๆ — ขึ้นเลื่อน ลูกบาศก์ที่ถูกบิด การย้ายฐานข้อมูล — จงล่าหาปริมาณที่การเดินถูกกติกาทุกครั้งอนุรักษ์ไว้ แล้วตรวจว่าจุดตั้งต้นกับเป้าหมาย เห็นพ้องกันบนปริมาณนั้นหรือไม่ ถ้าไม่ คุณจบงานแล้ว อย่างรุ่งโรจน์: สิบนาทิจของการล่าปริมาณไม่แปรเปลี่ยน หักล้างหมื่นชั่วโมงของการลองได้ นี่คือเลข 15 ที่ถูกบังคับของ Lo Shu เลื่อนขึ้นจากเลขคณิตสู่พลวัต และมันอาจเป็นรีเฟล็กซ์ที่มีค่าที่สุดเพียงหนึ่งเดียวในหนังสือเล่มนี้

สาธารณชนปี 1880 ไม่มีบทพิสูจน์ และดันต่อไปอีกหลายเดือน — การปะทะมวลชนครั้งแรกระหว่างความพยายามอันสุจริตกับปริมาณไม่แปรเปลี่ยน และความพยายามพ่ายแพ้ อย่างที่มันพ่ายแพ้เสมอ บทเรียนนั้นแพง ไม่มีใครจดจำ และจะถูกหิบบิ้นให้อีกครั้ง: ปริศนาที่ยากที่สุดของหนังสือเล่มนี้มากกว่าหนึ่งข้อ แก้ได้ด้วยการปฏิเสธที่จะเริ่มลงมือ

นักโชว์

Sam Loyd คือนักโชว์ปริศนาที่ยิ่งใหญ่ที่สุดเท่าที่เคยมีชีวิตอยู่ และประโยชน์นั้นต้องการทั้งสองซีกของมัน ชาวอเมริกันผู้โด่งดังตั้งแต่วัยรุ่นจากโจทย์หมากรุก เขามีพรสวรรค์อัจฉริยะในการทำปริศนาให้เป็นปรากฏการณ์การแสดง เขาขายปริศนา Trick Donkeys ให้ P. T. Barnum — ตั๋วการ์ดสามใบ จัดเรียงใหม่ แล้วผู้ซื้อสองคนก็ขึ้นขี่ลาสามตัวได้ อย่างไรก็ตามไม่รู้ ผลงานชิ้นเอกปี 1896 ของเขา Get Off the Earth วางนักรบสิบสามคนบนจานหมุน หมุนเพียงเล็กน้อยแล้วนับใหม่ — สิบสอง ไม่มีนักรบคนใดถูกซ่อน แต่ละร่างเจียบ ๆ บริจาคเสี้ยวหนึ่งของตัวเองให้ร่างอื่น และนักรบคนที่สิบสามดำรงอยู่เพียงในฐานะผลรวมของเสี้ยว นักรบผู้เลือนหายยังคงสอนคำถามที่ถูกต้องจนวันนี้ — จับตาดูว่าอะไรถูกอนุรักษ์ไว้จริง ๆ — และ Cyclopedia ฉบับตีพิมพ์หลังมรณกรรม (1914) ของ Loyd สมุดกองวัสดุแบบนั้นเป็นภูเขา ซึ่งไม่ใช่ทั้งหมดเป็นของเขาเอง: เขาหยิบฉวยงานคนอื่นอย่างเสรี รวมถึงจากนักปริศนาชาวอังกฤษที่คุณกำลังจะได้พบ

แล้วก็ถึงเรื่องการฉ้อฉล ตั้งแต่ปี 1891 จนวันตาย Loyd อ้าง — ในสิ่งพิมพ์ในบทสัมภาษณ์ ทศวรรษแล้วทศวรรษเล่า — ว่าเขาคือผู้ประดิษฐ์ 15 Puzzle และเป็นผู้ขึ้นกระแสนี้ในปี 1880 ข้ออ้างนั้นเข้าไปนั่งในหนังสืออ้างอิง และนั่งอยู่ตรงนั้น ถูกทวนซ้ำโดยสุจริตใจ นานกว่าหนึ่งศตวรรษ มันถูกทุบทิ้งเอาในปี 2006 เมื่อ Jerry Slocum และ Dic Sonneveld ตีพิมพ์งานสืบสวนจดหมายเหตุ The 15 Puzzle Book ไหล่รอยเส้นทางเอกสารจริงของปริศนา — กลับไปถึงนายไปรษณีย์แห่ง Canastota, Noyes Palmer Chapman ตัว Loyd ไม่ได้แม้แต่ก้าวเข้ามาในเรื่องจนกระทั่งความคลั่งกลายเป็นข่าวเก่า จงสังเกตลำดับเวลาด้วยความยำเกรงตามสมควร: บทพิสูจน์ความเป็นไปไม่ได้ (1879–80) มาก่อนข้ออ้างการประดิษฐ์ของ Loyd (1891) เขาใช้ชื่อเสียงทั้งชีวิตโปรโมตรางวัลที่เขาเชื่อว่าคณิตศาสตร์ทำให้เป็นโมฆะไปแล้ว สำหรับปริศนาที่เขาไม่ได้สร้าง

อัจฉริยะและการฉ้อฉลในชีวิตประวัตินี้ — และสำหรับผู้อ่าน คือการสอบเทียบถาวรหนึ่งครั้ง: กลไกประจำวงการนี้ที่วนกลับมาเสมอมีสองแบบ การแอบอ้างที่มา กับ ความยากปลอม และทั้งคู่เก่าแก่พอ ๆ กับธุรกิจนี้เอง คุณเพิ่งเห็นแบบแรกในรูปปริศนาที่ที่สุดของมัน เรื่องเหลวไหล "ปริศนาของ Einstein" ในบทหลังคือกลเดียวกันที่ยืมร่างคนดังผู้ล่วงลับมาสวม จงตรวจที่มาเสมอ แม้กับปริศนา โดยเฉพาะกับปริศนา

ช่างฝีมือ

คำตอบของอังกฤษต่อนักโซว์ คือนักเขียนปริศนาผู้เจียวขั้วและเรียนรู้ด้วยตนเองชื่อ Henry Ernest Dudeney และความต่างระหว่างชายสองคนนี้คือกระดุกสันหลังทางศีลธรรมของยุค ที่ Loyd ปรับทุกอย่างเพื่อความตระการตา Dudeney ปรับเพื่อความสง่างาม — และเขาทำให้ความสง่างามเป็นเกณฑ์ขัดแย้ง เกือบจะเชิงคณิตศาสตร์: ขึ้นส่วนน้อยที่สุด เส้นทางสั้นที่สุด ไอเดียสะอาดที่สุด

ผลงานชิ้นเอกของเขาเริ่มต้นเป็นคำท้าต่อผู้อ่าน วันที่ 6 เมษายน 1902 ในคอลัมน์ Weekly Dispatch ของเขา Dudeney ตั้งโจทย์ช่างตัดเสื้อบุรุษ (haberdasher's problem): จงตัดสามเหลี่ยมด้านเท่าเป็นชิ้นส่วนจำนวนน้อยที่สุดเท่าที่จะทำได้ ซึ่งประกอบกลับเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสสมบูรณ์ การมีอยู่ของการตัดเช่นนั้นเป็นข่าวเก่า — ทฤษฎีบทของ Wallace, Bolyai และ Gerwien (1807–1833) รับประกันว่ารูปหลายเหลี่ยมใด ๆ ตัดเป็นชิ้นที่ประกอบเป็นรูปหลายเหลี่ยมอื่นใดที่พื้นที่เท่ากันได้ การมีอยู่ได้มาฟรี เกมอยู่ที่ความน้อยที่สุด สีสัปดาห์ต่อมา วันที่ 4 พฤษภาคม 1902 Dudeney ตี

พิมพ์คำตอบของเขา: **สี่ขึ้น** ยิ่งกว่านั้น: ทั้งสี่ขึ้นติดกันพบต่อกันเป็นลูกโซ่ได้ให้ทั้งชุด
 แกว่งไปทางหนึ่งเป็นสามเหลี่ยม แกว่งกลับอีกทางเป็นจัตุรัส ราวกับสัตว์ไม้ที่พลิกกลับ
 ด้านในออก ปี 1905 เขานำแบบจำลองบานพับทองเหลืองขัดเงาไปแสดงต่อ Royal
 Society มันเข้าไปอยู่ในชุดรวมคลาสสิกของเขา The Canterbury Puzzles (1907)
 สมทบตลอดหลายปีด้วยแมงมุมกับแมลงวัน (1903), Amusements in Mathematics
 (1917) และ — ใน Strand กรกฎาคม 1924 — ปริศนาที่กลายเป็นต้นแบบของทั้งแนว
 SEND + MORE = MONEY หลายข้อในจำนวนนี้กำลังนอนดรอควอยู่ในตอนหลังของ
 เล่ม

โจทย์ช่างตัดเสื้อบุรุษยังถือชนวนที่ยาวที่สุดของบทนี้ไว้ด้วย คือค่าต่ำสุดจริงหรือ หรือ
 Dudeney เพียงหาสามขึ้นไม่พบ ไม่มีใครตอบได้ — เป็นเวลาหนึ่งร้อยยี่สิบสองปี
 ธันวาคม 2024 Erik Demaine, Tonan Kamata และ Ryuhei Uehara พิสูจน์ว่าการตัด
 สามขึ้นไม่มีอยู่จริง (arXiv 2412.03865): สี่ขึ้นของ Dudeney เหมาะที่สุดแล้ว ใบรับรอง
 ความเหมาะสมที่สุดใบแรกที่เคยได้มาสำหรับการตัดแบ่งรูปทรงที่ไม่จีบงอ ยุ่งอยู่กับ
 ความไม่สมมาตรนั้นสักครู่ การค้นพบคำตอบอันงดงามใช้เวลาเขียนคอลัมน์ยุค
 เอ็ดเวิร์ดหนึ่งคนสี่สัปดาห์ การพิสูจน์ว่าไม่มีอะไรดีกว่านั้นใช้เวลาคณิตศาสตร์อีกสิบสอง
 ทศวรรษ การทำได้ กับ การพิสูจน์ว่าทำดีกว่านี้ไม่ได้ คือกีฬาคนละชนิด เล่นกันบนมาตรา
 เวลาคนละมาตรา

สองเส้นทางอาชีพพันเกี่ยวกัน และไม่เสมอไปด้วยความยินยอม — Loyd นำสิ่ง
 ประดิษฐ์ของ Dudeney ไปตีพิมพ์ซ้ำได้ชื่อตัวเอง อีกหนึ่งรายการในบัญชีเรื่องที่มา แต่
 มรดกที่ลึกกว่าคือมาตรฐานของ Dudeney: ว่าคำตอบของปริศนาไม่เพียงแค่ถูกต้องได้
 แต่ใช้ได้ — น้อยที่สุด เหนือความคาดหมาย และคู่ควรแก่การหล่อด้วยทองเหลือง

อาจารย์ผู้เล่นสนุก

ขณะนักโหราศาสตร์ฝีมือแย่งชิงสาธารณชนหน้าหนังสือพิมพ์ อาจารย์คณิตศาสตร์แห่ง
 Oxford คนหนึ่งกำลังลักลอบขนตรรกศาสตร์เข้าห้องเด็ก Charles Lutwidge Dodgson
 — Lewis Carroll สำหรับทุกคนนับแต่นั้น — ปฏิบัติต่อปริศนาในฐานะรูปแบบ
 วรรณกรรม Doublets ของเขา เปิดตัวใน Vanity Fair ปี 1879 (ไฉยนั้น เขาเล่า มาหา
 เขาในวันคริสต์มาสปี 1877) ให้ผู้แก้เปลี่ยนคำหนึ่งเป็นอีกคำ ทีละหนึ่งตัวอักษร โดยทุก
 ขึ้นบันไดระหว่างทางต้องเป็นคำจริง มันดูเหมือนเกมห้องรับแขก แท้จริงมันคือการฝึก

เดินหมากที่แต่ละก้าวจื๊บจ้อย แต่ต้องถูกกติกาโดยรวมอยู่ตลอดเวลา — และหนึ่งศตวรรษต่อมา นักวิทยาการคอมพิวเตอร์จะจำได้ว่าบันไดคำ (word ladder) คือแบบฝึกหัดตำราเรียนของการค้นกราฟ Carroll ประดิษฐ์การบ้านวิชาอัลกอริทึม ก่อนจะมีสาขาวิชาไว้สำหรับการบ้านนั้นเสียอีก

A Tangled Tale (1885) ห่อคณิตศาสตร์ไว้ในนิยาย The Game of Logic (1886) เปลี่ยนตรรกบทเป็นเกมกระดานสำหรับเด็ก และในปี 1895 ในวารสารปรัชญา Mind Carroll ตีพิมพ์สี่หน้าที่ลึกที่สุดของยุคทองทั้งยุค: "What the Tortoise Said to Achilles" นักวิ่งสองรายของ Zeno กลับมา — คุณพบพวกเขาเมื่อบทที่แล้ว — แต่คราวนี้การแข่งขันคือข้อโต้แย้ง แต่ายอมรับข้อตั้งทุกข้อของนิรนัยง่าย ๆ บทหนึ่ง แต่ปฏิเสธที่จะยอมรับข้อสรุปจนกว่ากฎที่อนุญาตการอนุมานนั้นจะถูกเขียนลงเป็นข้อตั้งอีกข้อ Achilles จัดให้ เตาจึงเรียกร้องกฎที่อนุญาตกฎข้อนั้น — แล้วก็เรื่อยไป ตลอดกาล การถอยหลังไม่มีวันสิ้นสุดและคติของมันไม่เคยมีใครกล่าวได้ดีกว่านี้: กฎการอนุมานจะเป็นข้อตั้งไปเสียทั้งหมดไม่ได้ การให้เหตุผลต้องหยุดที่ไหนสักแห่ง ตรรกศาสตร์ สาขาวิชาที่ศึกษาการพิสูจน์ ไม่อาจถูกพิสูจน์ตัวเองลงไปได้จนสุดทาง นักตรรกศาสตร์อาชีพยังอ้างอิงนักเขียนหนังสือเด็กผู้นี้ โดยไม่มีเจตนาหยอกล้อ บนประเด็นนี้เปะ ๆ

ห้องคำ สองบทพิสูจน์

วันที่ 21 ธันวาคม 1913 Arthur Wynne นักหนังสือพิมพ์ผู้จัดหน้าบันเทิงคริสต์มาสของ New York World ตีพิมพ์ตารางรูปเพชรของถ้อยคำที่สานกัน เขาเรียกมันว่า "Word-Cross" การสลับคำของช่างเรียงพิมพ์ — cross-word — กลับติดปากถาวร หนึ่งทศวรรษมันเป็นเพียงคอลัมน์เล็ก ๆ แล้วกระแสลั่งปี 1924–25 ก็ปั่นมันเป็นอุตสาหกรรม และครอสเวิร์ดก็เข้าประจำตำแหน่งที่ไม่เคยยอมสละ: ปริศนาแรกในประวัติศาสตร์ที่กลายเป็นกิจวัตรรายวันของผู้คนนับล้าน การเล่นเกมปริศนาในฐานะพิธีกรรมไม่ใช่เหตุการณ์

อังกฤษ ตามวิสัยของตน ทำให้มันซับซ้อนยิ่งขึ้น ตั้งแต่ปี 1926 นักออกโจทย์นามปากกา Torquemada บุกเบิกครอสเวิร์ดแบบ cryptic ที่ซึ่งคำใบ้แต่ละข้อคือจักรกลจิ๋วแห่งการชี้ชวนให้หลงทาง สี่ทศวรรษต่อมา Ximenes ประมวลกติกาแฟร์เพลย์ของมันเป็นลายลักษณ์ (1966) สิ่งประดิษฐ์อันยิ่งใหญ่ของ cryptic เป็นเรื่องเชิงโครงสร้าง: คำใบ้ที่แฟร์ทุกข้อบรรจุทั้งนิยามและเส้นทางเล่นคำที่เป็นอิสระต่อกัน มุ่งสู่คำตอบเดียวกัน — สองบทพิสูจน์แยกขาด ที่ถูกบังคับให้ต้องลงรอยกัน ผู้แก้ไม่ได้เพียงหาคำตอบพบ คำ

ตอบมาถึงพร้อมการตรวจทานในตัวเสร็จสรรพ ความซับซ้อนถูกก่อสร้างฝังไว้ในตัววัตถุเอง วิศวกร นักบัญชี และนักรหัสลับต่างค้นพบคุณค่าของการยืนยันอิสระในสายอาชีพของตนมาแล้ว ครอสเวิร์ด cryptic สอนมันให้แก่วิทยาการเข้า

เข้าห้องทดลอง

เหตุการณ์เจียบ ๆ สามเรื่อง เกาะกลุ่มกันใกล้ปลายยุค เปลี่ยนว่าปริศนามีไว้เพื่ออะไร

ปี 1901–02 ใน Annals of Mathematics นักคณิตศาสตร์แห่ง Harvard ชื่อ Charles Bouton ทำสิ่งที่ไม่เคยมีใครทำกับเกมใดมาก่อน ให้ออกเกมไม้ขีดไฟ Nim: เขาปิดฉากมัน ทฤษฎีที่สมบูรณ์ — จากตำแหน่งใดก็ตาม ใครชนะเมื่อเล่นดีที่สุด และชนะอย่างไร ไม่ต้องพึ่งเล่ห์เหลี่ยมหรือจิตวิทยา วิธีชนะคือการประคองดุลยภาพหนึ่งให้ไม่แปรเปลี่ยนในทุกตาเดิน กลยุทธ์ได้กลายเป็นคณิตศาสตร์ บทพิสูจน์และอาวุธภาคปฏิบัติรออยู่ในบทที่ 9 สิ่งสำคัญตรงนี้คือแบบอย่างที่มีนัยยะไว้: เกมหนึ่งเกมสามารถถูกแก้จบได้ ปิดผนึก รู้ทะเล — ซึ่งชุดคำถามขึ้นมาแล้วเบา และเป็นครั้งแรก คำถามที่หนังสือเล่มนี้จะพบอีก: ถ้าเช่นนั้น ผู้เล่นมนุษย์กำลังมีส่วนสร้างอะไรอยู่กันแน่

ระหว่างปี 1917 ถึง 1945 จิตวิทยาอ้างสิทธิ์ปริศนาเป็นเครื่องมือวัด สิ่งของ Wolfgang Köhler ต่อลงไม้ขึ้นไปเอื้อมผลไม้ที่แขวนอยู่ (1917) และห้วงขณะของการจัดระเบียบใหม่อย่างฉับพลันที่เขาเฝ้าสังเกต ต้องการชื่อเรียกที่ไม่ใช่ "ลองผิดลองถูก" Karl Duncker จัดหากรอบให้ (ภาษาเยอรมันปี 1935; ภาษาอังกฤษ ตีพิมพ์หลังมรณกรรม 1945): การปึงแตก (insight) คือการจัดโครงสร้างปัญหาเสียใหม่ — ตัวปัญหาไม่เปลี่ยน คำบรรยายของคุณต่างหากที่เปลี่ยน — และศัตรูตัวฉกาจของมันคือการยึดติดหน้าที่ของสิ่งของ ความรู้ความสามารถที่จะมองพันบทยาทบทวนของวัตถุ ประโยชน์ที่คุณรู้จัก บดบังประโยชน์ที่คุณต้องการ การทดลองที่โด่งดังที่สุดของ Duncker — เทียนไข กล่องหมุด กำแพงโล่ง — ปรากฏเป็นปริศนาในบทที่ 4 จึงจะไม่สบยลอะไรมาเกินไปกว่านี้ Productive Thinking ของ Max Wertheimer (1945) ปิดขบวนการนี้อย่างสมบูรณ์ หลังสามพันปีของการคัดแยกจิตใจ บัดนี้ปริศนากำลังวัดพวกมัน

และราวปี 1945 ปริศนาข้อหนึ่งกวาดวงการวิทยาศาสตร์ยามสงครามแรงเสียดจนกลายเป็นมุกตลกด้านความมั่นคง: ให้เหรียญสิบสองเหรียญ หนึ่งในนั้นปลอม — หนักกว่าหรือเบากว่า ไม่รู้ทางไหน — จงหาเหรียญปลอมและทิศของมัน ด้วยการชั่งสามครั้งบนตาชั่ง

สองแขน มั่นสวาปามข้าวโม่งวิจัยในห้องพักผ่อนของฝ่ายสัมพันธ์มิตรมากถึงขั้นที่เพื่อนร่วมงานหยอกกันว่านำเอาไปโปรยเหนือเยอรมนี เพื่อทำให้นักวิทยาศาสตร์ฝ่ายศัตรูเป็นอัมพาต Freeman Dyson ตีพิมพ์บทวิเคราะห์ฉบับชี้ขาดใน Mathematical Gazette ปี 1946 เนื้อหาหลักของมันเป็นวิธีนับแบบใหม่ — ไม่ใช่ใช้นับเหรียญ แต่นับความเป็นไปได้เทียบกับคำตอบ: คำตัดสินสามครั้งของตาซึ่งจะจำแนกอะไรได้มากที่สุดสักแค่ไหน นั่นคือการคิดเชิงทฤษฎีข้อมูล ผูกใช้อย่างคล่องแคล่วสองปีก่อนที่ Claude Shannon จะมอบคณิตศาสตร์และชื่อเรียกให้แก่ข้อมูล (1948) ศักดิ์สิทธิ์สองเหรียญฉบับเต็มคือด่านบอสในบทที่ 7 พกการนับไปด้วย

ยุคสมัยปิดฉาก

ไล่เส้นเรื่องอีกหนึ่งรอบ นักปราชญ์ฝรั่งเศสมอบที่มาที่ไปให้ปริศนา (1612) สารานุกรมมอบความทรงจำ (1694) หนังสือพิมพ์ราคาเพนนีมอบมวลชน (1880) มวลชนพ่ายแพ้ต่อหน้าธารกำนัลให้แก่ปริมาณไม่แปรเปลี่ยนที่พวกเขามองไม่เห็น นักโฆ่วโหมยเครดิตรและกว่าศตวรรษให้หลัง นักประวัติศาสตร์คู่หนึ่งทวงคืน ช่างฝีมือพิสูจน์ว่าความสง่างามคือมาตรฐาน และคณิตศาสตร์ใช้เวลาสิบสองศตวรรษออกไปรับรองว่าเขาถูก อาจารย์ผู้หนึ่งแสดงให้เห็นว่าตรรกศาสตร์เองก็เล่นได้ ครอสเวิร์ดทำให้การเล่นปริศนาเป็นมื้ออาหารประจำวัน พร้อมการตรวจทานอับฝักอยู่ในเนื้อ และในช่วงท้ายสุด เกมหนึ่งถูกแก้จบสิ้นเชิง เสียง "อ้อ!" กลายเป็นหน่วยวัดในห้องทดลอง และปริศนาเหรียญสอนนักฟิสิกส์ให้ชั่งน้ำหนักตัวข้อมูลเสียเอง

ปริศนาเข้าสู่ยุคนี้ในฐานะความบันเทิง มันเดินออกไปในฐานะเครื่องมือ — สำหรับทดสอบจิตใจ วัดจิตใจ และตั้งคำถามว่าการคิดคืออะไร ก้าวถัดไปตามธรรมเนียมที่นั่น ทะเยอทะยานยิ่ง: เลิกศึกษาตัวปริศนา แล้วหันมาศึกษาตัวผู้แก้ โครงการนั้น — การคิดเรื่องการคิด — คือบทถัดไป และศตวรรษที่ยี่สิบไล่ตามมันด้วยเช็กलिस्ट ดัชนีรายการคอลัมน์นิตยสาร ลูกบาศก์พลาสติก และในท้ายที่สุด ปริศนาคำทายที่เล็งไปยังผู้เดินทางพันธุ์ใหม่ตรงหน้าประตู

บทที่ 3

คิดเรื่องการคิด

เกือบสี่พันปี ปริศนาทำหน้าที่ทดสอบจิตใจ กลางศตวรรษที่ยี่สิบ กิจกรรมนี้หมุนกลับด้านแล้วเริ่มศึกษาสิ่งที่ตนเคยทดสอบ คำถามของยุคใหม่ทั้งทะเยอทะยานและติดดินในเวลาเดียวกัน: การแก้ปัญหาคืออะไร พรสวรรค์นั้นเป็นของประทาน หรือเป็นงานช่างที่มีชิ้นส่วน — เรียกชื่อได้ สอนได้ ฝึกได้ ภายในทศวรรษเดียว คำตอบสี่แบบที่ต่างกันลิบลับก็ปรากฏขึ้น: เช็กलिस्टของศาสตราจารย์ ตูบัตรรายการของวิศวกร เวทีของนักเขียนคอลัมน์ และ — ช้ากว่ากันหน่อย — โรงเตี้ยมของนักตรรกศาสตร์ ระหว่างกันพวกเขาสร้างวัฒนธรรมสมัยใหม่ของการคิดเรื่องการคิด — ศตวรรษที่ "ฮิวริสติก" เดินออกจากห้องสัมมนา "lateral" ได้รับความหมายสมัยใหม่ของมัน และคอลัมน์ปริศนากลายเป็นอาชีพ — และบทนี้จะติดตามวัฒนธรรมนั้นไปจนถึงกาลปัจจุบันอันแปลกประหลาดของมัน ที่ซึ่งปริศนาคำทายชนิดเก่าแก่ที่สุดกลับมาเข้าเวทีหน้าประตูอีกครั้ง

เช็กलिस्ट

ปี 1945 นักคณิตศาสตร์เกิดในฮังการี George Pólya (โพลยา) ตีพิมพ์หนังสือเล่มบางที่ใช้ชื่อไม่ล่อมั่ว: How to Solve It ข้ออ้างของมันคือความนอกรีตต่อความโรแมนติกเรื่องอัจฉริยะ: การแก้ปัญหาไม่ใช่สายฟ้าจากความว่างเปล่า มันมีเฟส และเฟสเหล่านั้นเขียนลงกระดาษได้ **เข้าใจปัญหา วางแผน ลงมือตามแผน มองย้อนกลับ** ได้แต่ละเฟสคือเครื่องมือที่มีชื่อเรียก — คิดย้อนจากปลายทาง แก่โจทย์ที่ง่ายกว่าเสียก่อน ขยายสู่กรณีทั่วไป ถามว่าอะไรคือสิ่งไม่รู้ อะไรคือสิ่งที่ให้มา อะไรเชื่อมโยงทั้งสองเข้าด้วยกัน

เขียนออกมาอย่างนั้น มันดูเรียบง่ายจนแทบไม่น่าจะสำคัญ มันสำคัญมหาศาล Pólya ทำกับการแก้ปัญหาในสิ่งที่ชื่อหนังสือของ Alcuin ได้แต่ชี้นิ้วบอกใบ้เมื่อสิบเอ็ดศตวรรษก่อน: เขายกวิธีขึ้นเป็นหัวเรื่องอย่างชัดแจ้ง แยกออกได้จากโจทย์ข้อใดข้อหนึ่ง และด้วยเหตุนี้จึงสอนกันได้ เช็กलिस्टไม่ใช่อัลกอริทึม — ไม่มีอะไรในนั้นคำนวณคำตอบออกมา — แต่มันคือวินัยที่เล็งตรงไปยังสองโหมดคล้มเหลวอดนิยมนของมือสมัครเล่น: พุ่งลงมือก่อนเข้าใจ และหยุดทันทีที่คำตอบโผล่ ด้านโหมดแรก Pólya วางการซักถามอย่างถ่อม

ตอนที่นักแก้ทุกคนในหนังสือเล่มนี้ทำโดยสัญชาตญาณ: อะไรคือสิ่งไม่รู้ อะไรคือสิ่งที่ให้มา อะไรเชื่อมโยงทั้งสอง ด้านโหมดที่สอง คือคำสั่งที่ถูกประเมินค่าต่ำที่สุดของเขา ข้อที่สี่: มองย้อนกลับ โจทย์ที่คุณเพิ่งแก้เสร็จคือชิ้นตัวอย่างศึกษา จงชุดเหมืองจากมัน — หากลเม็ดที่ขยายผลต่อได้ หากการตรวจทานที่คุณข้าม หากถนนสายสั้นกว่าที่คุณมองพลาด — มิฉะนั้นคุณก็เพียงชนะ แต่ไม่ได้เรียน

ทุกสายธรรมนิยมฮิวริสติกแบบมีชื่อเรียกหลังจากนั้น สืบเชื้อสายจากหนังสือเล่มน้อยเล่มนั้นทั้งสิ้น รวมถึงเหล่าทำคิดที่วิ่งพล่านอยู่ทั่วหนังสือเล่มนี้ บทที่ 8 จะพา Pólya ลงสังเวียน แล้วถามว่าเหล่าแชมป์ต้องเติมอะไรลงไป เพื่อให้เชกิลส์รอดชีวิตจากการปะทะกับนาฬิกาที่เดินไม่หยุด — เพราะการรู้จักเฟสทั้งหลาย ปรากฏว่า ไม่ใช่สิ่งเดียวกับการบัญชาการมันได้ไ้แรงกดดัน

ตัวบัตร์รายการ

เกือบจะขณะเดียวกันนั่นเอง อีกฟากของม่านเหล็กที่กำลังเลื่อนลงปิด วิศวกรสิทธิบัตรโซเวียตชื่อ Genrich Altshuller เริ่มลงมืออ่าน ตั้งแต่ปี 1946 เขาไล่อ่านจดหมายเหตุสิทธิบัตร — ราวสองแสนสิ่งประดิษฐ์ ในท้ายที่สุด — โดยไม่ได้มองว่าสิ่งประดิษฐ์แต่ละชิ้นทำอะไร แต่มองว่ามันเล่นกลชนิดไหน ความนอกรีตของเขาคือภาพกระจกเงาของ Pólya: การปึงเชิงประดิษฐ์ไม่ใช่แม้กระทั่งเรื่องเฉพาะบุคคล ข้ามอุตสาหกรรมที่ไม่เกี่ยวข้องกันเลย ความขัดแย้งเดิม ๆ โพล์ซ่า (แข็งแกร่งขึ้นแต่ต้องเบาลง เร็วขึ้นแต่ต้องแม่นยำขึ้น) และพวกมันถูกคลี่คลายด้วยกลวิธีไม่กี่สิบท่าชุดเดิม — การแบ่งส่วน การกลับหัว การทำให้ล่องหน้า Altshuller กลั่นหลักการเชิงประดิษฐ์ออกมาราวสี่สิบข้อ จัดเมทริกซ์จับคู่ความขัดแย้งที่โพล์ซ่าเข้ากับหลักการที่สลายมัน และตีพิมพ์บทความแรกว่าด้วยวิธีนี้ ร่วมกับ Rafael Shapiro ในปี 1956 ระบบนี้เป็นที่รู้จักในชื่อ TRIZ อักษรย่อภาษารัสเซียของทฤษฎีการแก้ปัญหาเชิงประดิษฐ์

ของขวัญชวนหวนไหของ TRIZ จับใส่ประโยคเดียวได้: ใครสักคน ที่ไหนสักแห่ง ได้แกะรูปแบบธรรมชาติของความขัดแย้งของคุณไปเรียบร้อยแล้ว การปึงในฐานะการเปิดค้น ไม่ใช่สายฟ้า ความโรแมนติกไหลออกจนเกลี้ยง ตัวบัตร์รายการเข้ามาแทนที่ วิศวกรยังชุดใช้มันมาจนทุกวันนี้ ระหว่าง Pólya กับ Altshuller สารแห่งกลางศตวรรษนั้นชัดเจน — เสียงอ้อ! ทำให้เป็นระบบได้ สิ่งที่ยังเป็นไม่ได้ในตอนนั้นคือความนิยมของมหาชน งานนั้นต้องอาศัยสัมผัสของนักมายากล

เวที

ธันวาคม 1956 Scientific American ตีพิมพ์บทความชิ้นเดียวจบว่าด้วย hexaflexagon — แถบกระดาษพับที่ซ่อนและเผยหน้าใหม่เมื่อถูกดัดพลิก — โดยนักเขียนนิยายสารคดีที่ Tulsa ชื่อ Martin Gardner ชายผู้ — เป็นที่เลื่องลือ — ไม่มีปริญญาคณิตศาสตร์เลยสักใบ ผู้อ่านเรียกร้องขอเพิ่ม ตั้งแต่มกราคม 1957 "Mathematical Games" จึงลงเป็นรายเดือน และมันวิ่งต่อเนื่องยาวนานในสี่ศตวรรษ ถึงปี 1981 — ราวสามร้อยคอลัมน์ที่กลายเป็นเครื่องขยายเสียงที่ยิ่งใหญ่ที่สุดในประวัติศาสตร์ของความคิดเชิงสันตนาการ โดยไร้คู่แข่งที่แท้จริง

คอลัมน์นี้ได้ผลเพราะมันคือสะพานที่มีจราจรวิ่งทั้งสองทิศ ขาลง พรหมแดนวิชาการเดินทางมาถึงโต๊ะอาหารเช้า: Gardner แนะนำโลกให้รู้จัก Game of Life ของ John Conway (ตุลาคม 1970) กระเบื้องไรต์คาบของ Roger Penrose (มกราคม 1977) และการเข้ารหัสกุญแจสาธารณะ RSA (สิงหาคม 1977) — ในคอลัมน์เกม ขาขึ้น เหล่ามือสมัครเล่นส่งของขึ้นไป: จดหมายผู้อ่านช่วยลับโจทย์ให้คม จับข้อผิดพลาด บางคราวถึงขั้นสร้างการค้นพบ นักคณิตศาสตร์อาชีพทั้งรุ่นจะระบุงุดกำเนิดอาชีพของตนย้อนกลับไปถึง "Mathematical Games" ฉบับเดือนใดเดือนหนึ่งโดยเฉพาะ และผู้อ่านของเขายังนัดชุมนุมกันในงาน Gathering 4 Gardner ต่อเนื่องมาตั้งแต่ปี 1993 Gardner ยังประกอบกรรมอันเป็นธรรมทางประวัติศาสตร์ที่เกี่ยวพันตรงกับบทก่อนหน้า: เขาปลุก Loyd และ Dudeney คีนซีฟให้ศตวรรษใหม่ — และรายงานที่มาของทั้งคู่อย่างซื่อตรง หลักความเชื่อของเขา ซึ่งกล่าวไว้หลายสำนวนตลอดยี่สิบห้าปี คือเส้นแบ่งระหว่างการเล่นกับคณิตศาสตร์นั้นเป็นเพียงเส้นสมมุติ

เมื่อเขาวางมือ คอลัมน์ผู้สืบทอดของ Douglas Hofstadter ก็ค้อมคำนับเขาด้วยชื่อของตัวเอง: "Metamagical Themas" แอนาแกรมของ "Mathematical Games" ยากจะเอ่ยชื่อบุคคลอื่นใดที่สร้างนักแก้ปริศนาได้มากกว่านี้ ยุคฟื้นฟูมือสมัครเล่นปลายศตวรรษที่ยี่สิบ — เด็ก math circle นักสะสมปริศนา ชั้นหนังสือคณิตศาสตร์สันตนาการในร้านหนังสือ — โดยการประมาณชิ้นแรก ก็คือคอลัมน์ของ Gardner ที่แพร่กระจายพันธุ์

สองศาสตร์แห่งการเล่น

ยุคมหาชนผลิตนักทฤษฎีของตัวเอง และความซื่อสัตย์เรียกร้องให้เราให้เกรดพวกเขาต่างกัน

ปี 1967 Edward de Bono แพทย์เกิดที่ Malta ตีพิมพ์ The Use of Lateral Thinking และมอบคำที่ภาษาในชีวิตประจำวันต้องการอย่างเห็นได้ชัดให้แก่นั้น: การคิดแนวข้าง (lateral thinking) — การขยับออกด้านข้าง การหลบหนีอย่างจงใจจากร่องของการคิดพุ่งตรงไปข้างหน้า ("แนวดิ่ง") ภาพเปรียบเทียบเขาคือหลุม: เมื่อคุณขุดผิดที่ การขุดให้ลึกขึ้นไม่ช่วยอะไร — หลุมใหม่ต้องเริ่มขุดที่อื่น เขาสร้างเครื่องมือสำหรับบังคับก้าวออกข้าง — คำกระตุ้น PO (1972) และที่ทนทานที่สุด Six Thinking Hats (1985) วิธีการประชุมที่ทั้งกลุ่มสวมหมวกเดียวกันที่ละหมวก (ข้อเท็จจริง ความรู้สึก ความระวัง ประโยชน์ ความคิดสร้างสรรค์ กระบวนการ) เพื่อให้ผู้คนเลิกปกป้องอัตลักษณ์ แล้วผลัดกันเข้าประจำมุมมอง บัญชีข้อบ่งชี้ตรง กล่าวอย่างเปิดเผย อาณาจักรของเขามหิมาในเชิงพาณิชย์ แต่หลักฐานแบบควบคุมสำหรับ "ทักษะคิดแนวข้าง" ที่เป็นสากลและถ่ายโอนได้ยังคงบางเฉียบ Δ ตัวแบบฝึกมีประโยชน์จริง Six Hats อยู่รอดในฐานะอุปกรณ์ปลดอีโก้ที่ฉลาดแท้ ตัวแบรนด์ขายวิทยาศาสตร์เกินราคา จงเก็บแบบฝึกไว้ และให้เกรดคำอ้าง — การแยกแยะที่หนังสือเล่มนี้จะต้องหยิบมาใช้อีกครั้งในภาค V

Raymond Smullyan ไม่ต้องมีดอกจันใด ๆ นักตรรกศาสตร์ผู้เคยทำงานเป็นนักมายากลบนเวที Smullyan ตีพิมพ์ What Is the Name of This Book? ในปี 1978 — ชื่อหนังสือที่ตัวมันเองคือกบดักอ้างอิงตัวเองขนาดย่อม — และเปลี่ยนเศษเสี้ยวจากคติชน — เกาะแห่งอัศวินผู้พูดจริงเสมอและคนโกหกผู้โกหกเสมอ — ให้เป็นศิลปะอย่างเป็นระบบ: การอ้างอิงตัวเอง ถูกจับมาเลี้ยงจนเชื่อง หนังสือเล่มนั้นคือบันได: ปริศนาโรงเตี๊ยมแต่ละข้อคือขั้นที่สูงขึ้นทีละนิด จนผู้อ่านที่ป็นขึ้นมาเพื่อความสนุก ยืนอยู่ตรงริมขอบทฤษฎีบทความไม่บริบูรณ์ของ Gödel โดยไม่เคยต้องนั่งฟังบรรยายสักคาบเดียว — ซึ่ง To Mock a Mockingbird (1985) และ Forever Undecided (1987) ก็พาเดินประชิดเข้าไปอีก Smullyan พิสูจน์บางสิ่งซึ่งดงามเกี่ยวกับสายพันธุ์ของเรา: ผลลัพธ์ที่ลึกที่สุดในตรรกศาสตร์นั้นเดินไปถึงได้ ที่ละปริศนา โรงยิมได้บันไดขั้นสุดท้ายของตัวเองแล้ว คุณจะไต่บันไดขั้นล่าง ๆ ด้วยตัวเองในบทที่ 5

ระหว่างสองคนนี้ สองศาสตปากหมุดชั่วทั้งสองของยุคไว้ De Bono เทศนาความกว้าง — จงหนีจากกรอบ ไม่ว่ากรอบใด Smullyan ปฏิบัติความลึก — จงตามกรอบเดียวลงไปใน ถึงขั้นหินแข็ง นักแก้ที่ครบเครื่อง หนังสือเล่มนี้จะยืกรานเรื่อยไป ต้องมีทั้งสองมือ

วัตถุ

ฤดูใบไม้ผลิปี 1974 ที่ Budapest อาจารย์หนุ่มสาขาการออกแบบชื่อ Ernő Rubik สร้าง ลูกบาศก์ที่หน้าของมันหมุนได้ จัตุรัสสี่เหลี่ยมสี่ช่องบนหกหน้า แต่ละหน้าหมุนได้อย่าง อิสระ และตัววัตถุทั้งก้อนกลับไม่แตกกระจายออกจากกันอย่างน่าอัศจรรย์ สิทธิบัตร อังกฤษ 1975 เปิดตัวสู่โลก 1980 แล้วก็ถึงกระแสลั่งปี 1980–82 ใหญ่ที่สุดที่วงการเคย เห็นนับแต่ฤดูหนาวปี 1880 — คราวนี้คณิตศาสตร์มองเห็นได้อยู่ได้ผิวพลาสติกพอดิบ พอดี ลูกบาศก์ยังเปลี่ยนสังคมวิทยาของการติดขัด: เป็นครั้งแรกที่ความยากของ ปริศนาถูกพกพาไปในที่สาธารณะ ลูกบาศก์สลับสีและบนโต๊ะทำงานคือข้อเท็จจริงที่อ่าน ออกได้เกี่ยวกับเจ้าของ และเป็นเวลาสองปี ที่ผู้คนค่อนข้างเคราะห้เดินไปมาโดยถือ สถานะยังแก้ไม่เสร็จของตัวเองไว้ในมือ

ลูกบาศก์มี 43,252,003,274,489,856,000 ตำแหน่ง ตัดกับตัวเลขนั้น ข้อเท็จจริงสองข้อ นิยามความหมายของวัตถุชิ้นนี้ ข้อแรก: ปี 2010 Tomas Rokicki, Herbert Kociemba, Morley Davidson และ John Dethridge พิสูจน์ — ด้วยการคำนวณราวสามสิบล้านปีซีพียู — ว่าทุกตำแหน่งในจำนวนนั้นแก้ได้ภายในไม่เกิน 20 ตา "God's number" คือชื่อที่ชาว คิวบ์เรียกมัน ข้อสอง: ไม่มีวิธีของมนุษย์คนไหนเข้าใกล้เลย ผู้คนแก้ลูกบาศก์กันในห้าสิบ หรือหกสิบตา ด้วยการสร้างเครื่องมือเล็ก ๆ ที่ใช้ซ้ำได้ — ลำดับการหมุนแบบทำแล้วถอน คืน (commutator ของนักทฤษฎีกรุป) ที่เปลี่ยนแปลงชนิดเดียวขณะอนุรักษส่วนที่เหลือ ทั้งหมด ช่องว่างระหว่าง 20 กับ 60 คือบทเรียนที่แท้จริงของลูกบาศก์ และเป็นหนึ่งใน บทเรียนถาวรของหนังสือเล่มนี้: การรู้ว่าคำตอบมีอยู่ไม่ใช่สิ่งเดียวกับการเป็นเจ้าของมัน การมีอยู่กับการหาพบเป็นเงินคนละสกุล และแทบทั้งหมดของภาค III ว่าด้วยการหามา ซึ่งสกุลที่สอง

ตาราง

ก่อนการวิงผลิตรอบถัดไป จงสังเกตแพตเทิร์นที่ทั้งสายตระกูลเชื่อฟัง: ปริศนาบูมทุกครั้ง ในหนังสือเล่มนี้ชี้หลังเทคโนโลยีสี่ พาไพร์สแบก Ahmes ต้นฉบับราชสำนักแบก Alcuin

กระดานหนังสือพิมพ์ราคาถูกแบก 15 Puzzle และครอสเวิร์ด นิติสารรายเดือน กระดานมันแบก Gardner พลาสติกขึ้นรูปแบก Rubik บวมที่เหลื่อของบหนี่ซี่เว็บกับ สมาร์ทโฟน และแพตเทิร์นนี้ควรค่าแก่การเก็บไว้ เพราะมันพยากรณ์ได้: ไม่ว่าสื่อชนิดถัดไปจะเป็นอะไร ปริศนาจะเป็นหนึ่งในสิ่งแรก ๆ ที่มันหัดทำ

ทศวรรษเดียวกันนั้นทำให้ปริศนาตรรกะเป็นของมหาชน ผ่านการวิ่งผลัดสุดคาดฝัน ปี 1979 Howard Garns สถาปนิกอเมริกันวัยเกษียณ ตีพิมพ์ปริศनावางตัวเลขหน้าตาถ่อม เจียมชื่อ "Number Place" ในนิตยสารค่าย Dell มันอพยพไปญี่ปุ่น ที่ซึ่งสำนักพิมพ์ Nikoli ชัดเกลามัน และตั้งชื่อให้ในปี 1984 — sudoku "ตัวเลขต้องโสด" มันเคี้ยวอยู่ที่นั่น ยี่สิบปี จนกระทั่ง Wayne Gould ผู้พิพากษาเกษียณที่ใช้เวลาหลายปีเขียนโปรแกรม คอมพิวเตอร์สร้างโจทย์ ข่ายไอเดียให้ The Times แห่ง London สำเร็จ ตารางแรกลง พิมพ์วันที่ 12 พฤศจิกายน 2004 และภายในปี 2005 บวมก็ครอบคลุมทั้งโลก หลานของ Lo Shu — คุณพบบรรพบุรุษของมันเมื่อสองบทก่อน — ได้กลายเป็นสมาธิภาวนาประจำวันของผู้คนหลายร้อยล้าน: การแพร่กระจายเงื่อนไขบังคับในฐานะพิธีกรรมยามเช้า ไม่ ต้องใช้เลขคณิต ทุกข้อนิรณัยถูกบังคับมาให้แล้ว

คณิตศาสตร์ ตามวิสัยของมัน มาถึงที่หลังมวลชน ตารางสมบูรณ์ที่ถูกต้องมีอยู่ 6.67×10^{21} แบบ (Felgenhauer และ Jarvis, 2005) จำนวนเบาแส่น้อยที่สุดที่บังคับคำตอบ หนึ่งเดียวได้คือ 17 พอดี (McGuire, Tugemann และ Civario, 2012 — โดยการค้นด้วย คอมพิวเตอร์อย่างถ้วนทั่ว) วิทยาการคอมพิวเตอร์รับปริศนานี้เป็นห้องทดลอง "dancing links" ของ Donald Knuth ทำให้มันเป็นสนามทดสอบมาตรฐานของอัลกอริทึม exact-cover และครูคณิตศาสตร์ชาวโตเกียว Tetsuya Miyamoto ก็ดันการสอนไปอีกชั้นในปี 2004 ด้วย KenKen สร้างบนปรัชญาห้องเรียนของเธอ — "ศิลปะแห่งการสอนโดยไม่ สอน": ออกแบบเงื่อนไขบังคับให้ดีพอ แล้วนักเรียนจะสอนตัวเอง

หลักสูตรกับห้อง

สิ่งประดิษฐ์ขนาดย่อมกว่าสองชิ้นของยุคสมควรได้ย่อหน้าของตัวเอง เพราะแต่ละชิ้น เคลื่อนโรยิมไปสู่ที่ใหม่

ปี 2001 Colin Hughes เปิดตัว Project Euler — ชื่อที่คารวะเจ้าสำนักแห่ง Königsberg ผู้ที่คุณเห็นครั้งสุดท้ายในป้ายบอกทางหนึ่งประโยคของบทที่ 1 — ลำดับโจทย์

คณิตศาสตร์ตีความเลข ออกแบบให้เลขคณิตกำลังดิบล้มเหลว และมีเพียงการปึงเชิง อัลกอริทึม — วิธีมองที่ถูก ทฤษฎีบทที่ถูก คลาสความซับซ้อนที่ถูก — เท่านั้นที่วิ่งจบ ภายในไม่ถึงหนึ่งนาทีกติกาหนึ่งนาทีนั่นคือชิ้นงานอัจฉริยะเย็บ ๆ ของคนออกโจทย์: มันขีดเส้นสว่างแบ่งระหว่างการมีคำตอบกับการมีไอเดีย และมันให้เกรดความต่างนั้น โดยอัตโนมัติ คณิตศาสตร์กับการเขียนโปรแกรม หลอมรวมเป็นหลักสูตรเรียนเองตาม จังหวะตนหนึ่งเดียว ปริศนาได้กลายเป็นหลักสูตรการศึกษา

ปี 2007 ที่เกียวโต Takao Kato แห่งบริษัท SCRAP จัดแสดง Real Escape Game ครั้งแรก — ห้องที่คุณถูกขังไว้ข้างใน ซึ่งตัวห้องเองนั่นแหละคือปริศนา — ได้แรงบันดาลใจจากเกมเบร้าวเซอร์แนวซึ่แล้วคลิก สร้างขึ้นจากพร็อพที่ต้องได้และกลไกซ่อนเร้น สถานที่เฉพาะกิจแห่งแรกของยุโรป Parapark เปิดที่ Budapest (เมืองนั้นอีกแล้ว) ในปี 2011 และบูมระดับโลกตามมาในปี 2013–15 สิ่งที่ห้องหนีเต็มเข้ามาคือทุกสิ่งที่สื่อสิ่งพิมพ์จำต้องตัดทิ้ง: ร่างกาย และทีม ค้นหาด้วยมือ แบ่งบทบาทกัน ใช้เหตุผลได้เข้มนานาฬิกา ออกเสียงดัง ๆ ร่วมกับเพื่อน ใครที่เคยเล่นย่อมรู้ว่าฟอร์แมตนี้วัดอะไรกันแน่ — ไม่ใช่ความฉลาดโดดเดี่ยว แต่คือเมตาทักษะที่ห้อมล้อมมัน: ใครค้น ใครสังเคราะห์ ใครเฝ้าเวลา ใครเป็นคนพูดออกมาดัง ๆ ว่ากลุ่มใช้เวลากับตุ้ลล็อกใบเดิมมาเกินานาที่แล้ว สิ่งพิมพ์ไม่เคยทดสอบสิ่งนั้น ห้องทดสอบ การเล่นปริศนา ซึ่งสันโดษมาแต่ครั้ง Ahmes ได้กลายเป็นสถาปัตยกรรม — และเป็นสิ่งมีชีวิตทางสังคม

กระจกเงา

พิธีกรรมมวลชลล่าสุดของสายตระกูลเริ่มต้น อย่างเหมาะสม ในฐานะของก้านลแห่งความรัก ตุลาคม 2021 วิศวกรซอฟต์แวร์ Josh Wardle ปล่อยเกมเว็บเล็ก ๆ ที่เขาสร้างให้คู่รัก Palak Shah: คำห้าตัวอักษรวันละหนึ่งคำ เดาได้หกครั้ง ช่องตารางพลิกเป็นเขียว เหลือง หรือเทา ท่าไม้ตายของ Wordle มาถึงในเดือนธันวาคมปีนั้น — ปุ่มแชร์ที่โพสต์ตารางช่องสี่ของคุณโดยไม่มีตัวอักษร: หลักฐานว่าลงแรงจริง แบบไร้สปอยล์ ตารางเหล่านั้นไหลบ่าท่วมฟีดโซเชียล ถึงมกราคม 2022 New York Times ก็ซื้อเกมนี้ไปในราคาที่มีรายงานว่ "เจ็ดหลักต้น ๆ"

บทเรียนการออกแบบของ Wordle คือคอร์สอัดแน่นว่าทำไมปริศนาจึงติดลมบน: ความขาดแคลน (วันละหนึ่งข้อ — คุณโหมเล่นรวดเดียวไม่ได้) ชุมชน (ทุกคนเผชิญปริศนาข้อเดียวกัน) และการยืนยันแบบไร้สปอยล์ (ตารางแสดงว่าคุณแก้ได้ และเฉียดฉิวแค่ไหน แต่

ไม่มีวันแสดงว่าอะไร) แต่ผลพวงที่น่ารักที่สุดของมันเป็นเรื่องเชิงญาณวิทยา ภายในไม่กี่สัปดาห์ ผู้เล่นธรรมดา ๆ ก็ถกเถียงกันเรื่องคำเปิดที่เหมาะสมที่สุด — คำเดาคำไหนรัดข้อมูลจากคำตอบที่ซ่อนอยู่ได้มากที่สุด — และข้อถกเถียงเหล่านั้น ไม่ว่าผู้ถกจะรู้ตัวหรือไม่ คือการคำนวณเอนโทรปี ซึ่งถูกทำให้ชัดเจนในรูปแบบในบทความของ 3Blue1Brown ที่มีผู้ชมมหาศาล (กุมภาพันธ์ 2022) ดาวเคราะห์ทั้งดวงฝึกทฤษฎีข้อมูลก่อนอาหารเข้าห้องพักผ่อนยามสงครามของ Dyson ขยายสเกลขึ้นเป็นระดับสายพันธุ์

ประตูปิดอีกครั้ง

ซึ่งพาสายตระกูลกลับบ้าน

พฤศจิกายน 2019 นักวิจัย AI ชื่อ François Chollet ตีพิมพ์บทความชื่อ "On the Measure of Intelligence" และพร้อมกันนั้นคือแบบทดสอบชื่อ Abstraction and Reasoning Corpus — ARC ฟอร์แมตของมันล่อตัวแทบจะเหมือนของเด็ก: ตารางเล็ก ๆ ของช่องสี่ ตัวอย่างไม่กี่ชุดแสดงการแปลงรูป ก่อนและหลัง จงอนุมานกฎแล้วนำไปใช้กับกรณีใหม่ กฎของแต่ละภารกิจแปลกใหม่เสมอ — ประดิษฐ์ขึ้นเพื่อให้ไม่มีคลังแพตเทิร์นท่องจำใดบรรจุมันไว้ — และกฎเหล่านั้นพึงอยู่บนความรู้ชนิดที่เด็กห้าขวบครอบครองเท่านั้น: วัตถุคงอยู่ รูปทรงซ้ำตัวเอง สิ่งของร่วงหล่น เต็มเต็ม และสะท้อนกระจก เมื่อเห็นตัวอย่างสามชุด คนเรามักจะเห็นมันเลย แล้วจึงตะกุกตะกักเมื่อต้องบอกว่าเห็นอะไรกันแน่ ช่องว่างนั้น — ฉับพลันสำหรับดวงตา เกือบเขินสำหรับลิ้น — คือความแยบยลทั้งหมดของแบบทดสอบ

ข้อโต้แย้งของ Chollet สำหรับความสมเหตุสมผลนี้ เชือดลงลึกถึงข้อสมมุติที่ลึกที่สุดของยุคเครื่องจักรอัจฉริยะ: ทักษะไม่ใช่สติปัญญา ระบบใดที่ถูกฝึกมามากพอย่อมซ้ำของในงานที่มันเคยเห็น สติปัญญา เขาแย้ง คือประสิทธิภาพของการได้มาซึ่งทักษะใหม่ — สิ่งที่คุณทำเมื่อกฎเป็นของใหม่แท้ ๆ แบบทดสอบที่เชื่อถือจริงเป็นการอนุมานกฎจากตัวอย่างไม่กี่นัด: ภารกิจที่ง่ายสำหรับมนุษย์ และ โดยการออกแบบ ยากสำหรับเครื่องจักร

อ่านคำบรรยายนั้นซ้ำซ้ำ ๆ อีกครั้ง หนึ่งคำถาม ออกแบบมาให้จิตใจบางชนิดลั่นไกลตกลงไปทั้งตัว ตั้งไว้ตรงประตูที่บัดนี้ใคร ๆ ก็อยากผ่าน ทุกสิ่งเดิมพันไว้กับคำตอบ

สายตระกูลที่เปิดฉาก ณ Thebes ได้ปิดวงกลมใหญ่ของมันแล้ว: ปริศนาเฝ้าประตูกลับมาประจำการ และคราวนี้มันถูกเลี้ยงไปที่เครื่องจักร ประตูทุกบานถามสามคำถามพร้อมกัน

— ใครได้ผ่าน ใครเป็นผู้กำหนดว่าการผ่านหมายถึงอะไร และการผ่านพิสูจน์อะไรได้จริง
— และคำถามข้อที่สามได้กลายเป็น อย่างฉับพลันทีเดียว หนึ่งในคำถามทางปัญญาที่มีชีวิตชีวาที่สุดแห่งยุค จิตใจแบบไหนผ่าน แบบไหนลื่นตก คะแนนขยับเร็วเพียงใดและหมายความว่าอะไร — นั่นคือเรื่องเล่าของภาค IV เล่าไว้ที่นั่นด้วยตัวเลขและวันที่ เพราะในสังเวียนนั้นตัวเลขไม่ยอมนิ่งอยู่นิ่ง ๆ อย่างน้อยสฟิงซ์ย่อมพบว่าการจัดฉากทั้งหมดนี้ช่างคุ้นตา: ผู้เดินทางพันธุ์ใหม่บนถนน คำถามพันธุ์เก่าขวางทางอยู่

แต่ก่อนถึงกระดานคะแนน ต้องผ่านคลังแสงเสียก่อน ไม่ว่าสายพันธุ์ใดจะลงเอยเป็นผู้อ่านมัน เหล่าทำศึกก็ควรค่าแก่การครอบครอง — และสืบทอดไปจะวางมัน ที่ละท่า ลงในมือของคุณ

ภาค II

คลังทำคิด



บทที่ 4

หลายกรอบ

ปริศนาบางข้อต่อต้านคุณเพราะตัวมันยาก แต่ปริศนาในบทนี้ต่อต้านคุณเพราะตัวคุณต่างหากที่ยาก — เพราะที่ไหนสักแห่งระหว่างการอ่านโจทย์กับการลงมือโจมตี คุณแอบเติมกฎที่ไม่มีใครประกาศเข้าไปเงียบๆ มอบหน้าที่ตายตัวหนึ่งเดียวให้วัตถุที่เคยสมัครรับงานนั้น หรือขีดเส้นพรมแดนที่มีอยู่แค่ในหัวของคุณเอง คำตอบจึงนั่งอยู่กลางที่แจ้ง — ที่อีกฟากของกำแพงที่คุณก่อขึ้นมากับมือ

จิตวิทยามีชื่อเรียกให้เรื่องนี้ Karl Duncker ผู้ทำงานในสายประเพณี Gestalt (เอกสารวิชาการภาษาเยอรมันปี 1935; ฉบับภาษาอังกฤษตีพิมพ์หลังมรณกรรมปี 1945) แสดงให้เห็นว่าวัตถุถูกเชื่อมแน่นในใจเข้ากับหน้าที่ประจำของมัน — เขาเรียกมันว่า การยึดติดหน้าที่ของสิ่งของ (functional fixedness) — และอาการ "อ้อ!" ของการบั้ง (insight) ไม่ใช่ข้อสันนิษฐานแห่งแรงบันดาลใจ แต่คือ**การจัดโครงสร้างใหม่** (restructuring): ข้อเท็จจริงชุดเดิมเป๊ะ ที่จู่ๆ ถูกถือครองไว้ในรูปแบบคนละแบบ สำนัก Gestalt เคยเฝ้าดูเรื่องนี้กันสดๆ มาแล้ว: ชิมแปนซีของ Köhler (1917) นั่งจมนุ่มอยู่หน้ากล้วยที่เอื้อมไม่ถึง จนกระทั่งวินาทีหนึ่ง ลังไม้ก็เลิกเป็นของสำหรับนั่ง แล้วกลายเป็นของสำหรับปีนยีน; Productive Thinking ของ Wertheimer (1945) เสนอว่าความเข้าใจแท้ทุกชนิดมีรูปร่างแบบนี้ — ไม่ใช่การเติมข้อเท็จจริง แต่คือการมองข้อเท็จจริงที่มีอยู่แล้วเสียใหม่ ปริศนาจึงกลายเป็นเครื่องมือห้องทดลองสำหรับวัดปรากฏการณ์นี้ และนั่นคือเหตุผลที่หลายข้อในบทนี้פקการทดลองติดตามในบรรทัดที่มาของมันด้วย

ประสบการณ์ขณะเจอของจริงมีโครงสร้างที่ควรรู้อยู่ล่วงหน้า ขึ้นแรก ความคล่องมือ: แนวทางที่เห็นได้ชัด ถูกหยิบลองอย่างรวดเร็ว จากนั้นคือ**ทางตัน** (impasse): ทุกอย่างที่สมเหตุสมผลล้มเหลวหมด และรู้สึกราวกับว่าโจทย์นั้นแหละที่พัง นี่คือนาทีที่ตึงแก่ที่ไม่เคยฝีกยอมแพ้ — และเป็นวินาทีที่ปริศนากำลังถามคำถามของมันจริงๆ เพราะทางตันบนโจทย์ที่แก้ได้หมายถึงสิ่งเดียวเท่านั้น: มีข้อจำกัดบางข้อในหัวคุณที่ไม่ได้อยู่ในโจทย์ เมื่อการจัดโครงสร้างใหม่มาถึง มันมาทั้งก้อนในพริบตา และให้ความรู้สึกเหมือนถูกยื่นคำตอบให้ มากกว่าคำนวณคำตอบออกมาเอง ความฉับพลันนี้เองคือเหตุที่วัฒนธรรมทั้งหลายจัด

แฟ้มการปิ้งไว้ได้หมวดแรงบันดาลใจ เทพมิวส์ และตอนอาบน้ำ ทางต้นไม่ใช่ความล้มเหลว มันคือเครื่องวินิจฉัย — ความรู้สึกแบบเป๊ะๆ ของกรอบที่ผิดซึ่งไม่ยอมบรรจุกำตอบที่ถูก

ดังนั้นกลัมนื้อที่บั่นฝักจึงไม่ใช่ความเจ้าปัญญา แต่คือการรู้ทันกรอบ: นิสัยของการสังเกตว่าข้อจำกัดข้อไหนมาจากโจทย์ ข้อไหนมาจากตัวคุณ และความเต็มใจที่จะวางข้อจำกัดชนิดหลังลงบนโต๊ะแล้วทลายมันทีละข้อ ปริศนาชุดนี้จึงใจให้เบามือ — ส่วนใหญ่หนึ่งดาวกับสองดาว — เพราะความยากตรงนี้ไม่เคยอยู่ที่ตรรกะ มันอยู่ที่การมองเห็นอย่าปล่อยให้ใครสปอยล์ข้อไหนให้คุณ และอย่าสปอยล์ให้ตัวเอง: กับปริศนาสายปิ้งยิ่งกว่าปริศนาชนิดไหนๆ การได้ลองคือการฝึก ส่วนคำเฉลยที่แอบเปิดดูสอนอะไรไม่ได้เลยนอกจากเกร็ดไว้เล่า

วอร์มอัพสองข้อ

สองข้อนี้เด็กตอบได้และศาสตราจารย์พลาดได้ — และความพลาดของศาสตราจารย์คือด้านที่ให้บทเรียนมากกว่า เพราะมันพิสูจน์ว่ากรอบไม่ใช่อาการขาดความรู้ ยิ่งเชี่ยวชาญค่าตั้งต้น (default) ยิ่งมาก และฝังยิ่งลึก ความไม่สมมาตรข้อนี้แหละคือบทเรียน

★ 11 · ปริศนาคำทายศัลยแพทย์

โจทย์. พ่อกับลูกชายประสบอุบัติเหตุรถชน พ่อเสียชีวิต ลูกชายถูกนำส่งโรงพยาบาลโดยด่วน ศัลยแพทย์มองเด็กชายแล้วกล่าวว่า: "ฉันผ่าตัดเด็กคนนี้ไม่ได้ — เขาเป็นลูกชายของฉัน" เป็นไปได้อย่างไร?

หยุดตรงนี้ก่อน หน้ากระดาษรอได้เสมอ

เฉลย. ศัลยแพทย์คือแม่ของเขา (หรือในฉบับที่วิเศษยุคใหม่: พ่ออีกคนของเขา) สังเกตสิ่งที่เพิ่งเกิดขึ้น — หรือไม่ได้เกิดขึ้น ไม่มีชั้นตรรกะแม้แต่ขั้นเดียว ไม่มีการอนุมานให้ลงมือทำ "ความขัดแย้ง" ถูกผลิตขึ้นทั้งดุ้นจากข้อสมมุติค่าตั้งต้นข้อเดียว — ศัลยแพทย์ = ผู้ชาย — ที่สตีมาในหัวผู้อ่านสอดแทรกเข้ามาโดยไม่ขออนุญาต ปริศนาคำทายข้อนี้ถือกำเนิดในยุคปลุกจิตสำนึกทศวรรษ 1970 และนี่คือส่วนที่น่ากระอักกระอ่วน: มันยังใช้ได้ผลอยู่ งานศึกษาที่ Boston University ราวปี 2014 พบว่าผู้เข้าร่วมส่วนใหญ่ยังตอบ

พลาด ทั้งที่คำเฉลยเข้าไปอยู่ในคลังเรื่องเล่าพื้นบ้านมาแล้วหลายทศวรรษ คำตั้งต้นไม่หมดอายุด้วยตัวมันเอง

ทำ — ตรวจสอบมูลล่องหน. ข้อจำกัดที่ขึงยากที่สุดคือข้อที่คุณไม่เคยจดมันลงไป ก่อนจะประกาศว่าโจทย์ขัดแย้งในตัวเอง จงไล่รายการสิ่งที่คุณสมมุติไว้โดยคำตั้งต้นออกมา — แล้วสอบสวนคำตั้งต้นที่เก่าแก่ที่สุดก่อน เพราะพวกนั้นคือตัวที่คุณมองไม่เห็นอีกต่อไปแล้ว

★ 12. โรงแรมกับรถยนต์

โจทย์. ชายคนหนึ่งเข็นรถยนต์ของเขาไปยังโรงแรมแห่งหนึ่ง พอไปถึง เขาก็รู้ทันทีว่าตัวเองล้มละลาย เพราะอะไร?

อยู่กับมันสักครู่ — เดาให้ได้ก่อนแล้วค่อยอ่านต่อ

เฉลย. เขากำลังเล่น **Monopoly** (เกมเศรษฐี) หมากของเขาคือรถยนต์ เขาเพิ่งเดินตกช่องโรงแรม และจ่ายค่าเช่าไม่ไหว ข้อเท็จจริงทุกข้อที่ดูเสียสติ — เข็นรถยนต์, ล้มละลาย ทันทีที่มาถึงโรงแรม — กลายเป็นเรื่องแสนธรรมดาเมื่ออยู่ในกรอบที่ถูกต้อง นั่นคือลายเซ็นของปริศนาตระกูลนี้ทั้งตระกูล ("ปริศนาสถานการณ์" ซึ่งถูกสถาปนาเป็นแบบฉบับในหนังสือรวมโจทย์การคิดแนวข้าง (lateral thinking) ของ Paul Sloane ตั้งแต่ปี 1991): ข้อเท็จจริงพิลึกเป็นรายชิ้นแต่สอดคล้องกันเองภายใน และต่อให้ปะผุบริบทปัจจุบันหนักมือแค่ไหนก็ไม่มันวุ่นทำให้มันลงรอยกันได้

ทำ — สลับกรอบ. เมื่อข้อเท็จจริงประหลาดแต่กลมกลืนกันเอง จงเลิกพยายามอธิบายมันให้หนักขึ้น แล้วออกตามหากรอบที่ทำให้ข้อเท็จจริงทั้งหมดกลายเป็นเรื่องธรรมดาพร้อมกันในคราวเดียว การวินิจฉัยโรค การตีบัก และนิยายสืบสวนใช้ทำเดียวกันนี้ร่วมกัน: รายการอาการที่ไร้เหตุผลในเรื่องเล่าหนึ่ง เป็นเรื่องจับจ้องในอีกเรื่องเล่าหนึ่ง

คลาสสิกแห่งกรงล่องหน

สี่ข้อถัดไปคือคลาสสิกเสาหลัก ทั้งของงานวิจัยการปิ้งและของตำนานห้องสัมภาษณ์งาน แต่ละข้อปลุกข้อจำกัดปลอมกันคนละสายพันธุ์: เส้นเขต ป้ายฉลาก มิติ หน่วยวัด สังเกตไว้ระหว่างลงมือ: ข้อจำกัดไม่เคยถูกกล่าวออกมา — มันถูกชี้นำ ด้วยรูปภาพ ด้วยบรรจุกัณฑ์ ด้วยพื้นโต๊ะ ด้วยคำว่า "วัด" ปริศนาสายปิ้งฝีมือดีคือเครื่องจักรที่ทำให้คุณเป็นผู้ประพันธ์กรงขังของตัวเอง และงานฝีมือของแนวนี้อยู่ที่การขึ้นน่านล้นๆ

ข้อค้นพบเชิงทดลองของ Duncker วังร้อยผ่านทั้งสี่ข้อ: กลุ่มตัวอย่างที่เห็นวัตถุขณะถูกใช้งานตามหน้าที่ปกติของมัน แก๊วไจท์สำเร็จร่นน้อยกว่ากลุ่มที่เห็นมันวางว่างเฉยๆ (การทดลองซ้ำของ Adamson ปี 1952 ยืนยันผลนี้ และผลก็ยืนยันระยะมาตั้งแต่นั้น) กรอบมาถึงพร้อมกับเฟอร์นิเจอร์ จึงได้ผลพลอยได้เชิงปฏิบัติก่อนคุณจะทำปริศนาเสียอีก: เมื่อต้นจงบ้าบัญญัติดิบของไจท์ใหม่ทั้งหมด รวากับของทุกชิ้นเพื่งถูกเทกองออกมาจากถุง — ไร้ป้าย ไร้การจัดเรียง ไร้ประวัติ

★★ 13 · จุดเก้าจุด เส้นสี่เส้น

ไจท์. วาดจุดเก้าจุดเรียงเป็นตาราง 3×3 จงลากเชื่อมทั้งเก้าจุดด้วยเส้นตรงสี่เส้นโดยไม่ยกปากกา

ลองกับปากกาจริง กระดาษนะถูก แต่แรงสะดุ้งตอนปิ้งนะไม่ถูกเลย

เฉลย. จับตาดูความพยายามแรกของตัวเอง: เกือบทุกคนลากตามขอบบวทหนึ่งเส้น ทแยง หรือซิกแซกไปที่ละแถว แล้วจบที่ห้าเส้น — ห้าเสมอ ไม่เคยสี่ และอยู่ข้างในกรอบสี่เหลี่ยมล้นๆ เสมอ ภายในสี่เหลี่ยมที่จุดเหล่านั้นชี้นำให้เห็น มันเป็นไปได้จริงๆ; แยกกรณีนิดหน่อยก็พิสูจน์ให้ตัวเองยอมเชื่อได้ และสี่เหลี่ยมนั้นแหละคือกลวงทั้งหมด เพราะไจท์ไม่เคยเอ่ยถึงมันเลย ดวงตาเป็นผู้เสกเส้นเขตให้ นักแก้เป็นผู้เชื่อฟังกฎที่ไม่มีใครตั้ง เส้นทางฉบับมาตรฐานหลุดออกนอกตารางสองครั้ง: (1) เริ่มที่จุดล่างซ้าย ลากขึ้นผ่านคอลัมน์ซ้าย เลยจุดบนสุดไปอีกหนึ่งหน่วย; (2) ลากทแยงลงผ่านจุดกลางแถวบน และจุดกลางแถวขวา ต่อไปจนเลยมุมล่างขวาหนึ่งหน่วย; (3) ลากตรงกลับไปทางซ้ายตามแถวล่าง; (4) ลากทแยงขึ้นผ่านจุดศูนย์กลางไปยังจุดบนขวา สี่เส้น เก้าจุด และการรูก้าเขตหวงห้ามสองเที่ยว — เขตที่แท้จริงแล้วไม่เคยหวงห้ามเลย

ส่วนขยายเป็นหลักสูตรในตัวเอง: ถ้าจุดอ้วนพอ สามเส้นก็เอาอยู่; พับกระดาษเสียเส้นเดียวก็จบ เฉลยชั้นถัดไปแต่ละแบบหักกฎอีกข้อที่คุณไม่รู้ตัวว่ากำลังเชื่อฟังอยู่

ทำ — ตั้งคำถามกับเส้นเขตในจินตนาการ. ข้อจำกัดที่ขวางคุณอาจมีอยู่แค่ในรูปแทนของคุณเท่านั้น ปริศนาข้อนี้ — พิมพ์ใน Cyclopedia ของ Sam Loyd (1914) ในชื่อ "ปริศนาไขของ Christopher Columbus" ถูก N. R. F. Maier นำไปใช้ทดลองในปี 1930 และถูกเหล่าที่ปรึกษาด้านความคิดสร้างสรรค์ยุค 1970 หยิบไปเผยแพร่ — คือต้นกำเนิดโดยแท้ของวลี "คิดนอกกรอบ" (thinking outside the box) วลีที่มันได้มาครองหลังการพิมพ์ครั้งแรกหลายทศวรรษ ตัวสำนวนน่าจะล้ำแล้ว แต่ตัวทำยังไม่

★★ 14 · กล้องเทียนของ Duncker

โจทย์. บนโต๊ะ: เทียนหนึ่งเล่ม ไม้ขีดหนึ่งกลัก และหมุดกุดหนึ่งกล่อง จงติดเทียนเข้ากับผนังให้จุดไฟลุกไหม้ได้โดยไม่มีน้ำตาเทียนหยดลงบนโต๊ะ

หยุดก่อน นึกภาพโต๊ะตัวนั้น แล้วให้เวลามันสามนาทีเต็มๆ อย่างซื้อตรง

เฉลย. เทหมดอกจากกล่อง **ตอกหมุดยึดกล่องเข้ากับผนัง** แล้วตั้งเทียนบนกล่องต่างหึ่ง จุดเริ่มพลานั้นคาดเดาได้และให้บทเรียน: ตอกหมุดยึดเทียนกับผนังตรงๆ (เทียนแตก แฉกหมุดก็สั่นเกิน); ละลายขี้ผึ้งใช้ต่างกาว (รับน้ำหนักเทียนไม่อยู่) ความล้มเหลวทั้งสองแบบมีจุดบอดร่วมกันหนึ่งเดียว — กล่องไม่เคยถูกนับเป็นวัสดุเลย มันคือบรรจุภัณฑ์ เป็นส่วนของกระดาษห่อโจทย์ ไม่ใช่ส่วนของบัญชีทรัพยากรโจทย์

ในการทดลองของ Duncker เรื่องนี้วัดออกมาได้จริง และการวัดนี้แหละคือส่วนที่โด่งดัง: กลุ่มที่ได้รับหมุดบรรจุอยู่ในกล่อง แก้วโจทย์สำเร็จน้อยกว่ากลุ่มที่เห็นกล่องเปล่าตั้งอยู่มาก วัตถุประสงค์เดียวกัน โจทย์เดียวกัน — ต่างกันเพียงว่าในเงื่อนไขหนึ่ง กล่องกำลังปฏิบัติหน้าที่ค่าตั้งต้นของมันอยู่อย่างแข็งขัน บทบาทภาชนะของกล่องบดบังบทบาทแท่นวางของมันมิด นี่คือปริศนาปึงเชิงทดลองที่ถูกอ้างอิงมากที่สุดในวงการจิตวิทยา (Duncker, On Problem-Solving, 1935/1945) และมันได้ยอดอ้างอิงนั้นมาด้วยการทำซ้ำได้จนน่าอาย: การยึดติดหน้าที่ของสิ่งของไม่ใช่ความเพี้ยนของคนสะเพร่า แต่คือภาษาที่เก็บจากการรับรู้ของทุกคน ค่าซ่อมมีราคาแค่คำถามจงใจหนึ่งข้อ — ซึ่งก็คือตัวทำนั่นเอง

ทำ — ทหลายการยึดติดหน้าที่ของสิ่งของ. กับวัตถุทุกชิ้นในโจทย์ จงถาม: ในทางกายภาพ สิ่งนี้เป็นอะไรได้อีกบ้าง ถ้าไม่สนใจป้ายฉลาก? กล่องยังเป็นหิ้ง เป็นแท่น เป็นกำแพง เป็นหน่วยวัด ป้ายฉลากบรรยายประวัติ ไม่ใช่ความเป็นไปได้

★★ 15 . ไม้ขีดหกก้าน สามเหลี่ยมสี่รูป

โจทย์. จงใช้ไม้ขีดหกก้านประกอบสามเหลี่ยมด้านเท่าสี่รูป โดยแต่ละด้านยาวหนึ่งก้านเต็ม (สองรูปน่าจะง่าย; สี่รูปดูเหมือนต้องใช้ถึงเก้าก้าน)

ถ้ามีไม้ขีดจริงก็เอามาไปหยิบเลย แล้วค่อยหยุดคิด

เฉลย. ทั้งพื้นโต๊ะไปเสีย: สร้าง**ทรงสี่หน้า** (tetrahedron) — ไม้ขีดสามก้านเป็นฐานสามเหลี่ยม อีกสามก้านชูขึ้นไปบรรจบกันที่ยอด สี่หน้า หกขอบ พอดีเป๊ะ เลขคณิตของทางตันควรค่าแก่การสะกดออกมาให้ชัด: บนระนาบ สามเหลี่ยมรูปใหม่ทุกรูปหลังจากสองรูปแรกเรียกร่องขอบที่คุณไม่มี และตัวเลขก็ปิดบัญชีไม่ลงจริงๆ — แบบแบนราบ โจทย์นี้เป็นไปไม่ได้ ในสามมิติ ขอบที่ใช้ร่วมกันมาฟรีๆ ไม่มีใครสั่งว่าสามเหลี่ยมต้องนอนราบ คุณสมมติโต๊ะขึ้นมาเอง เพราะไม้ขีดวางอยู่บนโต๊ะ

ทำ — เพิ่มมิติ. เมื่อโจทย์ถูกข้อจำกัดรัดแน่นเกินไป เหตุ ตัวข้อจำกัดอาจเป็นปริภูมิแวดล้อมของคุณ ไม่ใช่ทรัพยากรของคุณ ทำนี้มีญาติกระจายอยู่ทุกหนแห่ง: ตัดเค้กเป็นแปดชิ้นด้วยการตัดสามครั้ง พับกระดาษเข้าช่วยบทพิสูจน์ เติมนกเวลาใส่ตัวแปรใหม่เพื่อคลายการเจรจาที่ล่อกลตาย ดินแดนแบนราบ (Flatland) โดยมากแล้วเป็นถิ่นพำนักโดยสมัครใจ

★★ 16 . เชือกสองเส้น สีสับห่านาที่

โจทย์. เชือกสองเส้น แต่ละเส้นไหม้จากปลายจรดปลายใน 60 นาทีพอดี — แต่ไหม้ไม่สม่ำเสมอ (ครึ่งเส้นอาจกินเวลา 5 นาทีหรือ 55 นาทีก็ได้) คุณมีไม้ขีด จงวัดเวลา **45 นาที** ให้แม่นยำ

หยุดตรงนี้ก่อน เชือกไม่หนีไปไหนแน่

เฉลย. จุดเริ่มพลาดที่ทุกคนทำ: พยายามใช้ความยาวเชือก — เผาให้ถึงจุดครึ่งทาง พับเชือกหาหมายหนึ่งในสี่ กะ 45 ด้วยระยะสามในสี่ ความไม่สม่ำเสมอมาทุกวิธีเรียบ; โจทย์บอกคุณไว้แล้วในถ้อยแถลงของมันเอง แต่นักแก้ส่วนใหญ่ก็ยังลอง เพราะคำว่า "วัด" กับ "ไม่บรรทัด" มาถึงแบบเชื่อมติดกันมา ตำแหน่งบนเชือกไม่บอกอะไรเกี่ยวกับเวลาเลย การปึงอยู่ตรงที่มีสิ่งเดียวรอดพ้นจากความเละเทะ: เชือกที่ถูกจุดไฟทั้งสองปลายจะไหม้จบในครึ่งหนึ่งพอดีของเวลาไหม้ที่เหลืออยู่ ไม่ว่าเปลวไฟจะบรรจบกันตรงไหน เพราะเวลาไหม้ของสองฝั่งต้องรวมกันได้เท่ายอดเต็ม และมันวิ่งไปพร้อมกัน คุณไม่มีทางรู้ว่าตรงไหนที่เปลวจะเจอกัน — และคุณก็ไม่จำเป็นต้องรู้ นั่นแหละคือการจัดโครงใหม่: เลิกพยายามปราบความไม่สม่ำเสมอ แล้วหาข้อเท็จจริงที่มันแปดเปื้อนไม่ได้

ดังนั้น: จุดเชือก A ทั้งสองปลาย และจุดเชือก B หนึ่งปลาย พร้อมกันทั้งหมด เปลวของ A บรรจบกันเมื่อครบ 30 นาทีพอดี ณ วินาทีนั้น จุดปลายอีกข้างของ B: B เหลือเวลาไหม้ 30 นาที และการไหม้จากสองปลายหันมันเหลือครึ่งเดียว — อีก 15 นาที รวม: $30 + 15 =$

45

ทำ — ใช้อัตรา ไม่ใช่ความยาว. ความไม่สม่ำเสมอทำลายการวัดตำแหน่งทุกรูปแบบ แต่เปลวไฟจากปลายทั้งสองข้างทันเวลาที่เหลือครึ่งหนึ่งเสมอ เมื่อระบบเละเทะ จงล่ำปริมาณที่ความเละเทะแต่ละต้องไม่ได้ — ปริมาณไม่แปรเปลี่ยน (invariant) ของอัตรา (บทที่ 6 กับบทที่ 9 จะสร้างคลังแสงทั้งคลังจาก invariant; นี่คือน้ำจิ้มคำแรกของการรุมหามันได้แรงกดดัน)

ถ้อยคำก็เป็นกรอบเหมือนกัน

ภาษาคือกรอบที่คุณพกติดตัวไปทุกที่ การเล่นคำจึงเป็นโรงยิมฝึกบั้งที่ถูกที่สุดเท่าที่มี ปริศนาคำทายคือประโยคที่ถูกวิศวกรรมมาให้อ่านแบบคำตั้งต้นของมันคือกบดัก — ญาติสายวาจาของสี่เหลี่ยมเก้าจุด คุณพบบรรพบุรุษน่าสะพรึงของฟอร์มนี้มาแล้วที่หน้าประตูบทที่ 1: ปริศนาคำทายของสฟิงซ์ทำงานด้วยการมัดคำว่า "ขา" และ "วัน" ไว้กับความหมายตรงตัวอักษร แล้วทำให้คุณจับคู่ความหมายเสียใหม่ กลไกไม่เปลี่ยนแม้แต่น้อยในสามพันปี ดีขึ้นก็แต่เดิมพัน

สองข้อคลาสสิกด้านล่างฝึกกล้ามเนื้อการจัดโครงใหม่มัดเดียวกับไม้ขีด เพียงแต่วัสดุที่ถูกจัดโครงใหม่คือไวยากรณ์ ทั้งคู่ยังฉายตัวอย่างล่งหน้าของวินัยที่บทนิพนธ์จะทวงถามอยู่ตลอดเวลา: ปฏิบัติต่อประโยคไม่ใช่ในฐานะบรรยาภาสไว้กวาดตาม่าน แต่ในฐานะโครงสร้างไว้ประเมินค่า — แจงส่วน แทนค่าเข้าไป ลดรูปลงมา

★★ 18 • Doublets: HEAD สู่ TAIL

โจทย์. จงเปลี่ยน HEAD ให้เป็น TAIL โดยเปลี่ยนครั้งละหนึ่งตัวอักษร และทุกชั้นระหว่างทางต้องเป็นคำภาษาอังกฤษจริง

ร่างสายโซ่ของตัวเองด้วยดินสอก่อนอ่านต่อ

เฉลย. HEAD → HEAL → TEAL → TELL → TALL → TAIL ห้าก้าว — สายโซ่ฝีมือ Lewis Carroll เอง โน้ตเชิงกลยุทธสำคัญกว่าคำตอบ: เดินจากปลายทั้งสองข้างเข้าหากกลาง; สรรวมักเป็นบานพับ; และบางคำเป็นทางตันเพียงเพราะละแวกเพื่อนบ้านระยะหนึ่งตัวอักษรของมันเล็กนิดเดียว สิ่งที่คุณกำลังทำอยู่จริงๆ — และ Carroll พุดออกมาแบบนี้ไม่ได้ในปี 1879 — คือการค้นกราฟ (graph search): สถานะคือคำ ขอบคือการเปลี่ยนหนึ่งตัวอักษร และปริศนาขอเส้นทางหนึ่งเส้น Carroll ตีพิมพ์ Doublets ในนิตยสาร Vanity Fair ปี 1879 (เขาเล่าว่าไอเดียลอยมาหาเขาในวันคริสต์มาสปี 1877); ทุกวันนี้ภาควิชาวิทยาการคอมพิวเตอร์สั่งแบบฝึกหัดเดียวกันเป๊ะในชื่อ "word ladders" การบ้านโจทย์หาเส้นทางสั้นสุด เขาประดิษฐ์แบบฝึกหัดอัลกอริทึมล่งหน้าไปหนึ่งศตวรรษ

ทำ — เดินหาเพื่อนบ้านที่ถูกกตึกา. คืบหน้าด้วยก้าวที่จ๊วเป็นรายก้าว แต่ต้องคงถูกกตึกาทั้งระบบในทุกก้าว นี่คือนัยของการรีแพกเตอร์โค้ดที่ต้องคอมไพล์ผ่านอยู่ตลอด ของการเดินหมากรุก ของการโยกย้ายระบบใดๆ ที่ทำสดทั้งที่ระบบยังวิ่งอยู่

★★ 19 • "พ่อของชายคนนั้น"

โจทย์. ชายคนหนึ่งมองภาพเหมือนบุคคลแล้วเอ่ยว่า: "พี่น้องชายหญิง ข้าหาไม่ แต่พ่อของชายผู้นั้นคือลูกชายของพ่อข้า" ใครอยู่ในภาพ?

หยุด — พุดคำตอบออกเสียงก่อนตรวจคำตอบเฉลย

เฉลย. ลูกชายของเขา คนส่วนใหญ่ตอบว่า "ตัวเขาเอง" และจุดพลัดนั้นระบุพิภักได้แม่นยำ: พวกเขาขยับขึ้นเร็วเกินไปหนึ่งชั้น จึงแทนค่าจากในสุดออกมา "ลูกชายของพ่อข้า" เมื่อไม่มีพี่น้อง ก็คือตัวข้า ประโยคจึงอ่านใหม่ได้ว่า: "พ่อของชายผู้นั้นคือข้า" ดังนั้นชายในภาพคือลูกชายของเขา ภาษาธรรมชาติซ้อนความสัมพันธ์ได้แก่กว่าพีชคณิต — ถ้อยคำเชื่อเชิญให้คุณกวาดตาผ่านตรงจุดที่สูตรจะบังคับให้ประเมินค่า ข้อนี้เวียนว่ายอยู่ในหนังสือปริศนาคำทายศตวรรษที่สิบเก้า และกลายเป็นข้อโปรดของ Martin Gardner ก็เพราะมันสาธิตให้เห็น — ในสิบสี่คำ — ว่าภาษาดัดแปลงโครงสร้างอย่างไร

ทำ — แทนค่าแล้วลดรูป. จัดความสัมพันธ์ซ้อนชั้นให้เป็นรูปแบบทางการ แล้วลดรูปทีละหนึ่งการผูกค่า เหมือนประเมินค่านิพจน์เป๊ะๆ แลกก่อนแล้วค่อยเชื่อ: ถ้าประโยคไหนขัดขึ้นการถอดความ แรงขัดขึ้นนั้นแหละคือรังของกลวง

ทำที่คุณครอบครองแล้ว

ปริศนาแปดข้อ ทำใช้ซ้ำได้เจ็ดทำ — ชั้นวางแรกของกล่องเครื่องมือที่หนังสือเล่มนี้ตั้งใจขายจริงๆ:

- **ตรวจสอบสมมูลกล่อง (11)** — ไล่รายการค่าตั้งต้นของคุณ; สงสัยตัวที่เก่าแก่ที่สุดให้มากที่สุด
- **สลับกรอบ (12)** — เมื่อข้อเท็จจริงกลมกลืนกันแต่ยังประหลาด จงเปลี่ยนเรื่องเล่า ไม่ใช่เพิ่มความพยายาม
- **ตั้งคำถามกับเส้นเขตในจินตนาการ (13)** — ถามว่าข้อจำกัดข้อไหนอยู่ในตัวบทของโจทยจริงๆ
- **หลายการยึดติดหน้าที่ของสิ่งของ (14)** — ถามว่าวัตถุแต่ละชิ้นเป็นอะไร ไม่ใช่มันมีไว้ทำอะไร
- **เพิ่มมิติ (15)** — ข้อจำกัดที่ขวางอยู่อาจคือปริภูมิแวดล้อมของคุณเอง
- **ใช้อัตรา ไม่ใช่ความยาว (16)** — หาปริมาณที่ความละเอียดแปดเปื้อนไม่ได้
- **ค้นหาเพื่อนบ้านที่ถูกกีดกา / แทนค่าแล้วลดรูป (18, 19)** — ก้าวเล็กๆ ที่ถูกกีดกา; ประเมินค่าภาษาเหมือนประเมินนิพจน์

สังเกตว่าทั้งเจ็ดคือร่างแปลงของเมตา-ทำเดียวกัน: ทำให้กรอบกลายเป็นวัตถุที่คุณหยิบมาตรวจได้ แทนที่จะเป็นเลนส์ที่คุณใช้ตรวจทุกสิ่งอื่น นั่นยังอธิบายว่าทำไมปริศนาสายปิ้งจึงแก้ตัวเร็วนักเมื่อพบครั้งที่สอง — กรอบที่ถูกเห็นแล้ว ถอนการเห็นคืนไม่ได้ — และทำไมคุณค่าของการฝึกจึงอาศัยอยู่ในทางตันสดใหม่ ไม่ใช่ในคำตอบที่ท่องจำ เมื่อปัญหาจริงจะกั๊กกัน บทข้อมนี้กลไกพอจะรันได้แม้ได้ความเครียด: ฉันทากำลังสมมุติอะไรโดยค่าตั้งต้น? ทรัพยากรแต่ละชิ้นเป็นอะไรได้อีก นอกเหนือจากป้ายของมัน? เส้นเขตของอาณาเขตที่ถูกกตีกาอยู่ตรงไหนกันแน่ — ใครเป็นคนขีด? โจทย์นี้จะหน้าตาเป็นอย่างไรถ้าขึ้นไปอีกหนึ่งมิติ หรือเขยิบไปอีกหนึ่งกรอบ?

คำเตือนตรงไปตรงมาหนึ่งข้อก่อนเดินต่อ การปิ้งเป็นทักษะการคิดที่ถูกทำให้โรแมนติกที่สุด และบันทึกงานวิจัยก็บางกว่ารัศมีของมัน — ผลการจัดโครงใหม่ของ Duncker เป็นของจริงและทำซ้ำได้; ส่วนคำอ้างโอ้อำเรื่อง "ความคิดสร้างสรรค์" สารพัดประโยชน์ที่ฝึกกันได้นั้นส่วนใหญ่ไม่จริง (บัญชีชำระฉบับเต็ม รวมถึงสิ่งที่อุตสาหกรรมเกมฝึกสมองล่อยนวลไปได้ รออยู่ในสุสานท้ายเล่มนี้) สิ่งที่ถ่ายโอนได้จริงคือเช็กลิสต์ที่คุณเพิ่งประกอบเสร็จ: สังเกตทางตัน เรียกชื่อกรอบ และถามว่าใครเป็นคนติดตั้งมัน บทถัดไปเลี้ยวจากการทลายกรอบไปสู่การเติมกรอบให้เต็ม — นิรันดร์ ที่ซึ่งไม่มีสิ่งใดถูกซ่อนไว้เลย ยกเว้นทุกสิ่ง

บทที่ 5

นิรนัยบริสุทธิ์

ปริศนานิรนัยไม่ซ่อนอะไรเลย ข้อเท็จจริงทุกข้อที่คุณต้องใช้ถูกวางบนโต๊ะตั้งแต่ประโยคแรก ไม่มีการปกปิดให้ทลาย ไม่มีการเล่นคำให้จับ ความยากทั้งหมดคือวินัย: ถือโครงข่ายข้อจำกัดไว้ในความจำใช้งาน ริดข้อเท็จจริงแต่ละข้อให้เกลี้ยงก่อนแตะข้อถัดไป และ — เหนืออื่นใด — ไม่มีวันสับสนระหว่างสิ่งที่คุณรู้กับสิ่งที่คุณเพียงสมมุติ การเดาก่อนที่ตาเดินบังคับจะถูกใช้งานหมดคือบาปมหันต์ของบทนี้ และแทบทุกคนก่อบาปนี้

คุณได้ลองญาติของนิรนัยไปแล้วครึ่งหนึ่งในเล่มนี้: หมาป่า แพะ และกะหล่ำปลีในบทที่ 1 คือการวางแผนบนปริภูมิสถานะ — การไล่แผนที่ตาเดินที่ถูกกติกาผ่านเขาวงกตของข้อจำกัด บทนี้เลี้ยวจากการวางแผนสู่การอนุมาน เนื้อหาไต่บันไดอย่างจงใจ: เริ่มจากคนโกหกกับคนพูดจริง (อะตอมของการแยกกรณี) ตามด้วยความผิดในฐานะข้อมูล แล้วตารางใหญ่ของปริศนาม้าลาย ต่อด้วยปริศนาที่ข้อมูลคือความไม่รู้ของคนอื่น และปิดท้ายด้วยนิรนัยแข่งกับนาฬิกา

สัญญาณหนึ่งข้อก่อนเริ่ม เฉลยแต่ละข้อข้างล่างสอนเส้นทาง — รวมถึงทางเลี้ยวผิดที่นักแก้หัวดีเลี้ยวกันจริงๆ — เพราะในนิรนัย วิธีคือรางวัลทั้งหมด ส่วนตัวคำตอบเองนั้นไร้ประโยชน์อย่างลือชื่อ: ไม่มีใครจำเป็นต้องรู้ว่าใครเลี้ยวม้าลาย

เรื่องจักรความจริง

Raymond Smullyan สร้างการศึกษาตรรกะทั้งหลักสูตร (What Is the Name of This Book?, 1978) บนเกาะเตี้ยว: อัศวินพูดจริงเสมอ คนลวงโกหกเสมอ ฉากฟังดูเหมือนเรื่องตลก แท้จริงมันคือห้องทดลองที่ทุกถ้อยคำกลายเป็นสมการ

★ 2 · อัศวินกับคนลวง: "เราเป็นคนลวงทั้งคู่"

โจทย์. บนเกาะแห่งหนึ่ง อัศวินพูดจริงเสมอ คนลวงโกหกเสมอ A พูดว่า: "เราเป็นคนลวงทั้งคู่" A กับ B เป็นอะไร?

หยุดตรงนี้ก่อน หน้ากระดาษรอได้เสมอ

เฉลย. ไล่สองกรณีที่มีอยู่ สมมติ A เป็นอศวิน: คำพูดของเขาจึงจริง แปลว่าทั้งคู่เป็นคน ลวง — รวมทั้งตัว A เอง ชัดแจ้ง; อศวินไม่โกหก ดังนั้น A เป็นคนลวง และคำพูดของเขา จึงต้องเท็จ: พวกเขาไม่ได้เป็นคนลวงทั้งคู่ ในเมื่อ A เป็นอยู่แล้วหนึ่งคน B จึงต้องเป็น อศวิน **A = คนลวง, B = อศวิน**

ละเลียดรายละเอียดเม็ดเล็กนี้ให้ดี เพราะมันหลอกคนไปได้อีกหลายปี: คนลวงพูดได้ว่า "เราเป็นคนลวงทั้งคู่" — ก็เพราะประโยคนั้นออกมาเป็นเท็จพอดี เขาโกหกเรื่องคู่ของเขา อย่างชัดเจนต่อธรรมชาติของตัวเอง ประเด็นไม่ใช่ว่าคนลวงไม่มีวันพูดอะไร แต่คืออะไร ที่ต้องเป็นเท็จเมื่อเขาพูดมันออกมา

ทำ — สมมุติ แล้วหักมัน. ตั้งสมมุติฐานทีละกรณี แล้วปล่อยให้ความขัดแย้งใน ตัวเองเป็นผู้คัดออก นี่คืออะตอมของนิรนัยเชิงตรรกะทั้งหมด — การพิสูจน์โดยข้อ ขัดแย้งในขนาดเล็กที่สุดที่พกติดตัวได้

★★ 4 • ทางแยก

โจทย์. ทางแยกหนึ่ง: สายหนึ่งไปสู่อิสรภาพ อีกสายไปสู่หายนะ ยามสองคน คนหนึ่ง โกหกเสมอ อีกคนพูดจริงเสมอ — คุณไม่รู้ว่าเป็นใคร เป็นใคร ถามได้หนึ่งคำถาม กับยามหนึ่ง คน คุณจะถามว่าอะไร?

หยุดแล้วลองประกอบคำถามด้วยตัวเอง มันประกอบขึ้นได้จริง

เฉลย. จุดเริ่มพลัด: ถามเชิงข้อเท็จจริง ("ทางไหนไปอิสรภาพ?") แล้วคุณจะได้อะไร เลย เพราะคุณสอบเทียบคำตอบไม่ได้หากไม่รู้ว่าเป็นผู้พูด การบั้งอยู่ตรงที่คุณไม่ จำเป็นต้องระบุตัวคนโกหก — คุณต้องส่งคำถามให้วิ่งผ่านยามทั้งสองคนพร้อมกัน ถาม ยามคนใดก็ได้: **"ถ้าฉันถามยามอีกคนว่าทางไหนไปอิสรภาพ เขาจะชี้ทางไหน?"** — แล้วเดินทางตรงข้าม ตรวจสอบทั้งสองกรณี: คนพูดจริงรายงานคำโกหกของคนโกหกอย่าง ชัดแจ้ง; คนโกหกโกหกเรื่องความจริงของคนพูดจริง ไม่ว่าทางไหน คำตอบวิ่งผ่านคำ โกหกหนึ่งครั้งพอดี ยามทั้งคู่จึงชี้ผิด — อย่างวางใจได้

วารีแยณตัยยามคนเดียวนับกะทัดรัดของ Smullyan ทำแบบเดียวกันด้วยเครื่องจักรทางตรรกะ: "คุณเป็นอัศวินก็ต่อเมื่อทางนี้ไปสู่อิสรภาพ ใช่หรือไม่?" เงื่อนไขสองทาง (biconditional) ก็บังคับให้คำโกหกหักล้างตัวเองเช่นกัน

ทำ — พัวคำโกหกทบทวนตัวเอง. คุณลบความบิดเบือนที่ไม่รู้จักออกไม่ได้ แต่คุณส่งสัญญาณให้วิ่งผ่านมันสองรอบ — หรือจับมันประกบกับตัวเอง — ให้มันหักล้างกันเองได้ วิทยาศาสตร์เชิงทดลองทำสิ่งเดียวกันและเรียกมันว่าการวัดเชิงผลต่าง (differential measurement) (ที่มาสำหรับผู้ใครรู้: เรื่องเล่าพื้นบ้าน โดยมีญาติเชิงทางการยุคแรกในโน้ตปี 1931 ของ Nelson Goodman; แพร่หลายโดย Smullyan และสำหรับเด็กทั้งรุ่นหนึ่ง โดยภาพยนตร์ Labyrinth, 1986)

★★ 3 . กล่องติดป้ายผิดสามใบ

โจทย์. กล่องสามใบ: ใบหนึ่งบรรจุแอปเปิลล้วน ใบหนึ่งส้มล้วน ใบหนึ่งปนกัน ป้ายเขียนว่า APPLES, ORANGES, MIXED — และ**ทุกป้ายติดผิดหมด** จงหยิบผลไม้ให้น้อยครั้งที่ที่สุด (ห้ามแอบมอง) แล้วติดป้ายทั้งสามใบใหม่ให้ถูกต้อง ต้องหยิบกี่ครั้ง?

หนึ่งลูก? สองลูก? คิดให้จบก่อนอ่านต่อ

เฉลย. หยิบครั้งเดียวก็พอ — แต่ต้องหยิบจากกล่องที่ถูกต้อง: ใบที่ติดป้าย **MIXED** ป้ายของมันผิด กล่องใบนั้นจึงเป็นกล่องล้วน หยิบหนึ่งลูก; สมมติว่าได้แอปเปิล กล่องป้าย MIXED จึงเป็นกล่องแอปเปิล ต่อด้วยลูกโซ่บังคับ: กล่องป้าย ORANGES บรรจุส้มไม่ได้ (ป้ายผิด) และบรรจุแอปเปิลก็ไม่ได้ (ลูกจูงไปแล้ว) — มันจึงเป็นกล่องปน กล่องป้าย APPLES รับสิ่งที่เหลือ: ส้ม สมมาตรกันหากหยิบได้ส้ม

จุดเริ่มพลาดที่ให้บทเรียนคือหยิบจากกล่องป้าย APPLES ป้ายผิดแปลว่าข้างในเป็นส้มหรือปน — หยิบลูกเดียวอาจตัดสินไม่ได้ว่าเป็นแบบไหน แล้วนิรนัยก็จอด ตาเดินที่ดูให้ข้อมูลน้อยที่สุด — สุ่มจากกล่อง "ปน" — กลับให้ข้อมูลมากที่สุด เพราะความผิดของป้ายใบนั้นสมบูรณ์เบ็ดเสร็จ: มันตรึงกล่องให้เหลือแค่สองความเป็นไปได้พอดี และผลไม้ลูกเดียวกันก็ผ่าสองทางนั้นออกจากกัน

ทำ — ความผิดพลาดคือข้อมูล. "ทุกป้ายผิด" ไม่ใช่ความโกลาหล มันคือข้อจำกัดชั้นดี ความผิดที่การันตีได้ให้ข้อมูลเท่ากับความจริงที่การันตีได้เป๊ะๆ (ของพื้นที่บ้านประจำศตวรรษที่ 20 ขวัญใจหนังสือรวมยุค Gardner และห้องสัมภาษณ์สายเทค — และแอบเป็นบทเรียนว่าควรใช้การวัดครั้งแรกของคุณที่ตรงไหน)

ตารางใหญ่

คราวนี้ถึงดาวงอร์เคสตราเต็มวง ตารางตรรกะ (logic grid) ขอให้คุณถือหมวดหมู่หมวดหมู่ที่เกี่ยวข้องร้อยกันไว้ในหัวพร้อมกัน และมันลงโทษทุกรอยรั่ว ต่อไปนี้คือตัวอย่างที่โด่งดังที่สุด — เฉลยจนจบครบทุกชั้น เพราะการไล่เฉลยนี้คือหลักสูตร

★★★ 5 • ปริศนาม้าลาย ("ปริศนาของ Einstein")

โจทย์. บ้านห้าหลังเรียงแถว แต่ละหลังมีสี สัญชาติ เครื่องดื่ม ยี่ห้อบุหรี่ และสัตว์เลี้ยงที่ไม่ซ้ำกันเลย รายการเงื่อนไขจำแนกคลาสสิก (ต้นฉบับปี 1962 นับ "มีบ้านห้าหลัง" เป็นเงื่อนไขข้อหนึ่ง จึงโฆษณาว่ามีสิบห้าข้อ):

1. คนอังกฤษอาศัยในบ้านสีแดง
2. คนสเปนเลี้ยงสุนัข
3. กาแฟถูกดื่มในบ้านสีเขียว
4. คนยูเครนดื่มชา
5. บ้านสีเขียวอยู่ติดขวามือของบ้านสีงาช้างพอดี
6. คนสูบ Old Gold เลี้ยงหอยทาก
7. บุหรี่ Kools ถูกสูบในบ้านสีเหลือง
8. นมถูกดื่มในบ้านหลังกลาง
9. คนนอร์เวย์อาศัยในบ้านหลังแรก
10. คนสูบ Chesterfields อาศัยติดกับชายผู้เลี้ยงจิ้งจอก
11. Kools ถูกสูบติดกับบ้านที่มีม้า

12. คนสูบ Lucky Strike ดื่มน้ำส้ม

13. คนญี่ปุ่นสูบ Parliaments

14. คนนอร์เวย์อาศัยติดกับบ้านสีน้ำเงิน

ใครดื่มน้ำเปล่า? ใครเลี้ยงม้าลาย?

ข้อนี้คู่ควรกับตารางหนึ่งผืน ดินสอหนึ่งแท่ง และเวลาครึ่งชั่วโมง จัดให้มันเถอะ

เฉลย (มีคำตอบเดียว — ยืนยันแล้วด้วยการค้นแบบถ้วนทั่ว). เส้นทาง พร้อมทางแยก
สองจุดไขว้อย่างชัดเจน:

ปักสมอ. เงื่อนงำสองข้อเป็นสัมบูรณ์: คนนอร์เวย์อยู่บ้าน 1 (ข้อ 9) นมอยู่บ้าน 3 (ข้อ 8)
ข้อ 14 จึงบังคับให้ **น้ำเงิน = บ้าน 2** — เพื่อนบ้านเพียงคนเดียวของคนนอร์เวย์ได้สาม
ช่องแล้วโดยไม่ต้องเดาเลย

บิบสี. เขียวอยู่ติดขวาของงาช้างพอดิ (ข้อ 5): คู่นี้ลงได้ที่ (3,4) หรือ (4,5) เพราะบ้าน 2
เป็นน้ำเงิน ขณะเดียวกัน บ้านแดงมีคนอังกฤษอาศัย (ข้อ 1) แดงจึงไม่ใช่บ้าน 1 (คน
นอร์เวย์) หรือบ้าน 2 (น้ำเงิน)

นี่คือทางแยกแรก และบทเรียนแรกเรื่องการฆ่ากิ้ง ลองงาช้าง = 3, เขียว = 4 แดงกับ
เหลืองจึงลงบ้าน 1 กับ 5; คนอังกฤษกันแดงออกจากบ้าน 1 ดังนั้นแดง = 5, เหลือง = 1
Kools = 1 (ข้อ 7), ม้า = 2 (ข้อ 11) กาแฟ = 4 (ข้อ 3) บ้าน 1 สูบ Kools จึงเป็นบ้านของ
Lucky Strike กับน้ำส้มไม่ได้ (ข้อ 12) และคนนอร์เวย์ก็ไม่ใช่คนยูเครนผู้ดื่มชา — บ้าน 1
จึงดื่มน้ำเปล่า ส่วนขา กับน้ำส้มลงที่บ้าน 2 กับ 5 บ้าน 5 คือคนอังกฤษ คนยูเครนกับขา
ของเขาจึงนั่งบ้าน 2 น้ำส้มกับ Lucky Strike อยู่บ้าน 5 คนสเปนกับคนญี่ปุ่นเติมบ้าน 3
กับ 4; บุหรี่ที่เหลือ — Old Gold, Chesterfields, Parliaments — เติมบ้าน 2, 3, 4 แล้ว
ทุกอย่างก็กลม: คนสูบ Old Gold เลี้ยงหอยทาก (ข้อ 6) แต่บ้าน 2 เลี้ยงม้า และบ้าน 3
หรือ 4 หลังที่ไม่ใช่คนญี่ปุ่นผู้สูบ Parliaments ก็คือคนสเปน — ผู้เลี้ยงสุนัข หอยทากไม่
เหลือที่อยู่ กิ่งนี้ตาย ชิดเข้ามาทั้งอย่างสาแก่ใจ: กิ่งที่ตายแล้วคือข้อเท็จจริงหนึ่งข้อ

ดังนั้นงาช้าง = 4, เขียว = 5 และกาแฟ = 5 แดงกับเหลืองเติมบ้าน 1 กับ 3; คนอังกฤษ
กันแดงออกจากบ้าน 1 อีกครั้ง ดังนั้น **แดง = 3** (คนอังกฤษ = 3), **เหลือง = 1**, Kools = 1
และม้าอยู่บ้านติดกันคือหลัง 2

กระจายเครื่องดื่ม. บ้าน 1 สูบ Kools จึงไม่ใช่ Lucky Strike จึงไม่มีน้ำส้ม; คนนอร์เวย์ไม่ใช่คนยูเครน จึงไม่มีชา; นมกับกาแฟถูกจองแล้ว **บ้าน 1 ดื่มน้ำเปล่า** (คำตอบแรก และมันมาถึงด้วยการคัดออกล้วนๆ) ชากับน้ำส้มเติมบ้าน 2 กับ 4 ทางแยกที่สองแบบสั้นๆ: ถ้าคนยูเครนนั่งบ้าน 4 น้ำส้มจะตกไปบ้าน 2 พร้อมกับ Lucky Strike — ทำให้คนญี่ปุ่นผู้สูบ Parliaments ไม่เหลือที่นั่งในช่องที่ยังว่าง และบังคับคนสเปนเจ้าของสุนัขไปทับม้าของบ้าน 2 ตายภายในสองตาเดิน ดังนั้น **ยูเครน = 2, ชา = 2, น้ำส้ม = 4, Lucky Strike = 4**

โดมิโนตัวท้ายๆ. บ้าน 4 กับ 5 รับคนสเปนกับคนญี่ปุ่น; Parliaments (ข้อ 13) นั่งบ้านเดียวกับที่ Lucky Strike จดอยู่ไม่ได้ ดังนั้น **ญี่ปุ่น = 5, สเปน = 4, สุนัข = 4** เหลือ Old Gold กับ Chesterfields สำหรับบ้าน 2 กับ 3; หอยทากตาม Old Gold ไป และบ้าน 2 เลี้ยงม้าอยู่แล้ว — ดังนั้น **Old Gold = 3, หอยทาก = 3, Chesterfields = 2** จึงจอกอาศัยติดกับคนสูบ Chesterfields (ข้อ 10): บ้าน 1 หรือ 3; หอยทากครองบ้าน 3 อยู่ ดังนั้น **จิ้งจอก = 1** สัตว์เลี้ยงลงที่แล้วสี่ตัว — ช่องที่ห้าวางเปล่าและรอคอยอยู่

บ้าน	1	2	3	4	5
สี	เหลือง	น้ำเงิน	แดง	งาช้าง	เขียว
สัญชาติ	นอร์เวย์	ยูเครน	อังกฤษ	สเปน	ญี่ปุ่น
เครื่องดื่ม	น้ำเปล่า	ชา	นม	น้ำส้ม	กาแฟ
บุหรี	Kools	Chesterfields	Old Gold	Lucky Strike	Parliaments
สัตว์เลี้ยง	จิ้งจอก	ม้า	หอยทาก	สุนัข	ม้าลาย

คนนอร์เวย์ดื่มน้ำเปล่า; คนญี่ปุ่นเลี้ยงม้าลาย — สองสิ่งที่เงื่อนไขไม่เคยเอ่ยถึงเลย ถูกบังคับให้ถือกำเนิดโดยทุกสิ่งที่เหลือ

ทำ — ปักสมอ แล้วแผ่ผล. ปักข้อเท็จจริงสัมบูรณ์ลงก่อน แล้วบีบทุกเงื่อนไขกับตารางซ้ำแล้วซ้ำเล่า; อย่าแตกกิ่งตราบใดที่ยังมีตาเดินบังคับเหลืออยู่ และเมื่อจำเป็นต้องแตกกิ่งจริงๆ จงเลือกช่องที่มีผู้สมัครน้อยที่สุด แล้วดำเนินคดีกึ่งนั้นให้ตายโดยไว วินัยนี้ — การแผ่ผลข้อจำกัด (constraint propagation) พร้อมการแตกกิ่งแบบชี้แจงและผืนใจ — คือวิถีหาหินของ SAT solver ยุคปัจจุบันเป๊ะๆ

ที่มา พร้อมรอยยิ้ม. ปริศนาข้อนี้ถูกขายทั่วโลกในชื่อ "ปริศนาของ Einstein" บางครั้งพร้อมเครื่องเคียงว่า "มีคนเพียง 2% เท่านั้นที่แก้ได้" แหล่งกำเนิดที่แท้จริง: นิตยสาร Life International ฉบับ 17 ธันวาคม 1962 ไร้ชื่อผู้เขียน เฉลยพร้อมรายชื่อผู้แก้สำเร็จตามมาในเดือนมีนาคมปีถัดไป ตารางเอ่ยถึง Kools บุหรียี่ห้อยุคทศวรรษ 1930 และตีพิมพ์เจ็ดปีหลัง Einstein เสียชีวิต; ป้ายผู้แต่ง Lewis Carroll ก็จมน้ำในอ่างเดียวกัน Einstein ไม่เคยเห็นมัน 2% คือการตลาด และปริศนาก็ไม่ต้องการทั้งสองอย่าง — มันคือผลงานชิ้นเอกของพนักงานนิตยสารนิรนาม ซึ่งไปๆ มาๆ กลับเป็นเรื่องเล่าที่ดีกว่าเดิมเสียอีก

ความไม่รู้คือข้อมูล

บันไดขั้นถัดไปอ่านเว็บแรกเหมือนเป็นไปได้ ปริศนาที่ผู้คนประกาศแต่สิ่งที่ตัวเองไม่รู้ — แล้วแค่นั้นกลับพอ เคล็ดลับคือเลิกได้ยิน "ฉันไม่รู้" เป็นคำขอโทษ แล้วเริ่มได้ยินมันเป็นข้อความทางคณิตศาสตร์ว่าด้วยเซตข้อมูลของผู้พูด

★★★ 6 · วันเกิดของ Cheryl

โจทย์. Cheryl บอกเดือนของวันเกิดเธอแก่ Albert และบอกวันแก่ Bernard โดยเลือกจาก: 15 พ.ค., 16 พ.ค., 19 พ.ค., 17 มิ.ย., 18 มิ.ย., 14 ก.ค., 16 ก.ค., 14 ส.ค., 15 ส.ค., 17 ส.ค. Albert: "ผมไม่รู้ว่วันไหน แต่ผมรู้ว่า Bernard ก็ไม่รู้เหมือนกัน" Bernard: "ตอนแรกผมไม่รู้ แต่ตอนนี้รู้แล้ว" Albert: "งั้นตอนนี้ผมก็รู้แล้วเหมือนกัน" วันเกิดของ Cheryl คือวันไหน?

ด้านแรงอยากอ่านผ่านๆ ให้ได้ แต่ละประโยคคือตัวกรอง — ใช้มันตามลำดับ

เฉลย. จุดเริ่มพลาคือพยายามเดาว่า Albert กับ Bernard กำลังคิดอะไรอยู่ อย่าทำ จงแปลถ้อยคำแต่ละประโยคให้เป็นข้อเท็จจริงเกี่ยวกับรายชื่อนวันที่ผู้สมัคร แล้วตัดทิ้ง

ประโยค 1 ครั้งหลัง — "ผมรู้ว่า Bernard ไม่รู้" Bernard จะรู้วันที่ก็ต่อเมื่อวันของเขาไม่ซ้ำใครในรายการ: 19 (มีแต่ พ.ค.) หรือ 18 (มีแต่ มิ.ย.) Albert ผู้ถือแค่เดือนกลับมั่นใจว่า Bernard ไม่รู้ — เดือนของ Albert จึงต้องไม่มีวันเอกลักษณ์เลยสักวัน พ.ค. กับ มิ.ย. ถูกกวาดทิ้งยกเดือน เหลือ: 14 ก.ค., 16 ก.ค., 14 ส.ค., 15 ส.ค., 17 ส.ค.

ประโยค 2 — "ตอนแรกผมไม่รู้ แต่ตอนนี้รู้แล้ว" Bernard ผู้ถือวัน ระบุนวันที่ได้แล้วในหมู่ผู้รอดชีวิต — วันของเขาจึงต้องปรากฏเพียงครั้งเดียวในสิ่งที่เหลือ เลข 14 ปรากฏสองครั้ง (ก.ค. กับ ส.ค.): ตัดทิ้ง เหลือ: 16 ก.ค., 15 ส.ค., 17 ส.ค.

ประโยค 3 — "จันทอนนี้ผมก็รู้แล้วเหมือนกัน" Albert ผู้ถือเดือน มั่นใจแล้วในตอนนี — เดือนของเขาจึงต้องมีผู้รอดชีวิตเพียงหนึ่งเดียว ส.ค. ยังถืออยู่สองตัว **16 ก.ค.**

สังเกตสิ่งที่คุณเพิ่งทำไป: สามประโยคว่าด้วยความไม่รู้ตรงวันที่เพียงหนึ่งเดียวออกมาจากสิบ โดยไม่มีใครแถลงข้อเท็จจริงเกี่ยวกับวันเกิดเลยสักข้อ ความไม่รู้ที่ประกาศต่อสาธารณะคือข้อมูล (และใช่ — คำตอบตกลงที่วันที่ 16 กรกฎาคม วันเดียวกันเป๊ะกับที่บัญญัติปริศนาของหนังสือเล่มนี้ถูกรวบรวมและตรวจทาน บังเอิญ แต่เป็นความบังเอิญชนิดชวนอึ้ง)

ทำ — คัดออกผ่านความรู้ของคนอื่น. ทุกคำ "ไม่รู้ / ตอนนี้รู้แล้ว" คือข้อเท็จจริงแข็งๆ เกี่ยวกับเซตข้อมูลของผู้พูด; จงใช้มันเป็นตัวกรองกับรายชื่อนผู้สมัครที่ทุกฝ่ายเห็นร่วมกัน ตามลำดับของบทสนทนา เครื่องยนต์เดียวกันนี้ขับเคลื่อนสัตว์ประหลาดหาคำ — ปริศนาผลบวก-ผลคูณ "เป็นไปได้" ของ Freudenthal — ที่รออยู่ในบทที่ 7 เคียงข้างชาวเกาะหนึ่งร้อยคนผู้นิรนัยสีดำของตัวเองออกมาจากความเงิบลั่นๆ

ที่มา. SASMO (Singapore & Asian Schools Math Olympiad) เมษายน 2015; มันดังระเบิดไปทั่วโลกผ่านโพสต์ Facebook ของพิธีกรโทรทัศน์ Kenneth Kong ทำให้ตรรกศาสตร์เชิงญาณ (epistemic logic) กลายเป็นหัวข้อที่โลกเล็งกันมากที่สุดบนโต๊ะอาหารเข้าอยู่ชั่วขณะหนึ่ง สายตระกูลของมันวิ่งตรงกลับไปหาปริศนาความรู้ของ Freudenthal ปี 1969

นิรนัยแข่งกับนาฬิกา

ตารางตรรกะนั้นหนึ่กนึ่ง บันไดขั้นสุดท้ายเติมการจัดตารางเวลาเข้าไป — นิรนัยว่าด้วยลำดับของการกระทำ — ที่ซึ่งกับดักคือข้อสมมุติที่ฟังสมเหตุสมผลเสียจนไม่รู้สึกรว่าเป็นข้อสมมุติเลย

★★★ 7 · สะพานกับคบไฟ

โจทย์. คนสี่คนต้องข้ามสะพานเชือกในยามค่ำคืน สะพานรับได้ครั้งละไม่เกินสองคน; กลุ่มมีคบไฟหนึ่งอัน และคนที่ข้ามต้องถือมันไปด้วยเสมอ เวลาข้ามของแต่ละคน: 1, 2, 5 และ 10 นาที; คู่ที่ข้ามด้วยกันเดินด้วยความเร็วของคนที่ช้ากว่า ทุกคนข้ามครบใน **17 นาที** ได้หรือไม่?

คำตอบที่เห็นได้ชัดคือ 19 หยุดจนกว่าเลข 19 จะเริ่มกวนใจคุณ

เฉลย. แผนตะกละ — ให้คนเดิน 1 นาทีรับส่งทุกคน เพราะขากลับควรถูกที่สุด — ได้ว่า: 1&10 ข้าม (10), 1 กลับ (11), 1&5 ข้าม (16), 1 กลับ (17), 1&2 ข้าม (19) **19 นาที** และนักแก้ส่วนใหญ่จุดตรงนี้ พร้อมความมั่นใจว่าโจทย์พิมพ์ผิด

ข้อสมมุติที่ฝังอยู่คือคนเร็วที่สุดควรถือคบไฟเสมอ จงตั้งคำถามว่าโครงสร้างต้นทุนให้รางวัลกับอะไรกันแน่: การข้ามของ 5 กับ 10 คือรายการแพง และในแผนตะกละคุณจ่ายทั้งสองรายการแยกบิลกัน ถ้าให้ทั้งคู่ข้ามด้วยกันละ ให้ 10 กลืนต้นทุนของ 5 ไปทั้งก้อน?

นั่นต้องมีการจัดฉาก: 1&2 ข้าม (2), 1 กลับ (3), **5&10 ข้าม (13)**, 2 กลับ (15) — เจ้า 2 ถูกจอดไว้ฝั่งโน้นล่วงหน้าก็เพื่อให้มีคนส่งสารราคาถูกพร้อมใช้พอดี — 1&2 ข้าม (17) **สิบเจ็ด** คุณจ่ายขากลับถูกๆ เพิ่มหนึ่งเที่ยว (ของเจ้า 2) เพื่อรวมสองต้นทุนที่เลวร้ายที่สุดเข้าเป็นบิลใบเดียว ยืนยันแล้วว่าเหมาะสมที่สุด — ไม่มีกลยุทธ์ใดชนะ 17 (ปริภูมิกลยุทธ์ทั้งหมดถูกค้นจนหมดแล้ว; นี่คือแดนของอัลกอริทึม Dijkstra ถ้าคุณชอบขี่ช้างจับตักแตน)

ทำ — จับของแพงหารบิลเดียวกัน. สอบสวนข้อสมมุติแบบตะกละด้วยการถามว่า โครงสร้างต้นทุนให้รางวัลกับอะไรจริงๆ — ในที่นี้คือการจัดคิวสองต้นทุนเลวร้ายที่สุดให้ซ้อนทับกัน จนอันหนึ่งซ้อนอยู่ในอีกอัน จัดแบตซ์คิวริฐานข้อมูลซ้ำๆ ของคุณเข้าด้วยกัน; วาง migration ก่อทวนทั้งสองงานไว้ในหน้าต่างซ้อนบารุงเดียวกัน (ที่มา: สืบย้อนได้ถึง Super Strategies for Puzzles and Games ของ Levmore & Cook ปี 1981; คำถามสัมภาษณ์ Microsoft ชื่อตั้งยุคทศวรรษ 1990 สมัยที่การสัมภาษณ์งานยังสนุกอยู่)

ทำที่คุณครอบครองแล้ว

ปริศนาหกข้อ หกทำ — ชั้นวางความเคร่งครัดของกล่องเครื่องมือ:

- **สมมุติ แล้วหักมัน (2)** — แยกกรณีโดยมีความขัดแย้งเป็นเพชฌฆาต
- **พับคำโกหกทบทวมันเอง (4)** — ส่งสัญญาณวิ่งผ่านความบิดเบือนของมันเองให้หักล้างกัน
- **ความผิดลวนคือข้อมูล (3)** — ความผิดที่การันตีได้มีค่าเท่าความจริงที่การันตีได้
- **ปักสมอ แล้วแผ่ผล (5)** — สัมบูรณ์มาก่อน; อย่าแตกกิ่งขณะยังมีตาเดินบังคับ; ฆ่ากิ่งให้ไว
- **คัดออกผ่านความรู้ของคนอื่น (6)** — ความไม่รู้ที่ประกาศออกมาคือตัวกรอง; ใช้ตามลำดับบทสนทนา
- **จับของแพงหารบิลเดียวกัน (7)** — ตรวจสอบว่าโครงสร้างต้นทุนให้รางวัลอะไร ก่อนจะเชื่อความตะกละ

ข้อสังเกตปิดท้ายที่บทถัดๆ ไปจะลับให้คมขึ้นเรื่อยๆ ไม่มีอะไรในบทนี้ต้องใช้ใช้อัจฉริยภาพเลย — ม้าลายพ่ายให้กับการทำบัญชี, Cheryl พ่ายให้กับตัวกรองสามชั้น, สะพานพ่ายให้กับข้อสมมุติหนึ่งข้อที่ถูกตั้งข้อสงสัย นิรนัยคือศิลปะการคิดที่เรียนรู้ได้ง่ายที่สุด ก็เพราะเนื้อหาทั้งหมดของมันคือกระบวนการวิธี: ใช้ตาเดินบังคับให้หมด เรียกชื่อข้อสมมุติของตัวเอง ปฏิบัติต่อความไม่รู้ในฐานะหลักฐาน ส่วนเครื่องจักรนั้น ต้องพูดกันตรงๆ ว่าทำการใช้เหตุผลครั้งนี้ได้เลิศเลอ — ตารางและตารางเวลาคือสนามเหย้าของพวกมัน แต่

เหตุผลที่ควรฝึกอยู่ดีจะมาถึงทุกครั้งที่ปัญหายืดข้อจำกัดให้คุณโดยไม่ยื่น solver แถมมาด้วย: สัญญาณบับหนึ่ง การวินิจฉัยโรค ตารางเวลา พยานคนหนึ่งผู้บอกคุณแต่เพียงสิ่งที่เขาไม่รู้

บทที่ 6

ตัวเลข โอกาส และรูปทรง

อุปกรณ์ที่เราใช้อยู่ในเกาต์ สัมผัสเชิงจำนวนของมนุษย์นับวัตถุได้สี่ชิ้นในปริบตา รู้สึกถึงช่องว่างระหว่างสี่กับสี่สิบ แต่ไม่รู้สี่ถึงช่องว่างระหว่างสี่สิบล้านกับสี่สิบล้าน และจัดเก็บความน่าจะเป็นทุกค่าไว้ได้หัวข้อเพียงสามหัวข้อ: ไม่เกิดหรือ อาจจะ เกิดแน่ ชุดเครื่องมือนี้รับใช้นักหาของปาม่าอย่างดี และมันยังทำงานอยู่ตลอดเวลา — เร็ว ลื่น และผิดในแบบที่ไม่มีความรู้สึกที่กำลังผิดติดมาด้วยเลย คำตอบที่ผิดของปริศนาทุกข้อในบทนี้มาถึงในทันที พร้อมความมั่นใจเต็มร้อย

กล่ามเนื้อที่ฝึกในบทนี้คือการส่งไม้ต่อ: รู้สึกให้ทันจังหวะที่คำถามหลุดออกนอกเขตอำนาจของสัญชาตญาณ แล้วส่งมันให้เครื่องมือที่แข็งแกร่งกว่า — สัญกรณ์ การคำนวณ การพิสูจน์ เครื่องมือเหล่านี้ไม่ใช่อุปกรณ์ตามธรรมชาติ เลขคณิตแบบประจำหลักต้องถูกลักลอบเข้ารูปรูปในหนังสือปริศนา (บทที่ 1); ทฤษฎีความน่าจะเป็นยังอายุไม่ถึงสี่ศตวรรษ ไม่มีใครรับรู้ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขได้โดยตรง คนที่จัดการมันได้ถูกต้องคือคนที่เลิกเชื่อความรู้สึก แล้วหัดตรวจสอบ

สี่กระบวน: ตัวเลข โอกาส การประมาณ รูปทรง — รู้อย่างแม่นยำ รู้แต่เมื่อ รู้อย่างหยาบๆ และท้ายที่สุด รู้ว่าสิ่งหนึ่งเป็นไปได้ ระหว่างทาง สัญชาตญาณในท้องจะคอยยื่นคำตอบให้: 183 คน, ห้าสิบ-ห้าสิบ, "วันในสัปดาห์ที่ไม่มีทางสำคัญอยู่แล้ว", "วิธีรักษาไهنชชะภาพรวมก็ต้องดีกว่า" ทุกข้อผิดพลาด จงสังเกตว่าความแนใจนั้นให้ความรู้สึกอย่างไร ณ วินาทีก่อนการแก้ไขแต่ละครั้ง; ความรู้สึกนั้นแหละคือหลักสูตร ที่ได้ที่กลางสังหาริมทรัพย์ที่ไล่คำนวณมาขัดแย้งกัน ผลที่ไล่คำนวณชนะ ทุกครั้ง

ตัวเลข

เริ่มด้วยเลขคณิต: ปริศนาสามข้อว่าด้วยการให้สัญลักษณ์แบกสิ่งที่ความใส่ใจทำหล่น

★ 26 · อูฐสิบเจ็ดตัว

พ่อคนหนึ่งเสียชีวิต ทิ้งอูฐไว้สิบเจ็ดตัว: ครึ่งหนึ่งให้ลูกคนโต หนึ่งในสามให้ลูกคนกลาง หนึ่งในเก้าให้ลูกคนเล็ก อูฐผ่าแบ่งไม่ได้ ระหว่างที่ทายาทเถียงกัน คนแปลกหน้าขี่อูฐผ่านมาและให้ยืมอูฐของเธอหนึ่งตัว สิบแปดตัว: คนโตรับเก้า คนกลางหก คนเล็กสอง — รวมสิบเจ็ด — แล้วคนแปลกหน้าก็รับอูฐของตัวเองคืนและขี่จากไป ทายาททุกคนได้รับอย่างน้อยเท่าส่วนแบ่งที่สัญญาไว้ เกิดอะไรขึ้น?

หยุดตรงนี้ก่อน กลเม็ดซ่อนอยู่ตรงไหน?

เฉลย. บวกเศษส่วนในพินัยกรรม: $1/2 + 1/3 + 1/9 = 9/18 + 6/18 + 2/18 = 17/18$ พินัยกรรมไม่เคยเป็นการแบ่งมรดกทั้งก้อนตั้งแต่แรก มันจัดสรรขาดไปหนึ่งในสิบแปดพอดี และช่องว่างนั้นคืออูฐตัวสุดท้าย อูฐที่ยืมมาเติมฝูงให้ครบจำนวนที่เศษส่วนกัลดได้พอดีค่า และเพราะพินัยกรรมสัญญาไว้แค่ $17/18$ ของฝูง ส่วนแบ่งจำนวนเต็ม $9 + 6 + 2 = 17$ จึงบรรจุลงในอูฐสิบแปดตัวโดยเหลือหนึ่ง — ตัวของคนแปลกหน้าเอง ทายาทแต่ละคนได้ดีกว่าลายลักษณ์อักษรของพินัยกรรม: เก้าตัวเทียบกับ 8.5 ที่สัญญา, หกเทียบกับ 5.67, สองเทียบกับ 1.89 กลเม็ดนี้ซื้อตรงก็เพราะคำสั่งเดิมนั้นขัดแย้งในตัวเองพอดีบพอดิ คนแปลกหน้าไม่ได้แบ่งมรดก เธอซ่อนเลขคณิตของมัน โดยไม่คิดค่าจ้าง นิทานเรื่องนี้เป็นคติชนที่พบทั้งในสายอาหรับ อินเดีย และยุโรป — บ่อยครั้งเล่าเป็นเรื่องของ Birbal ปราชญ์เจ้าปัญญาประจำราชสำนัก — และ Tartaglia ก๊อภิปราชฉบั่ม้าสิบเจ็ดตัวไว้ แล้วตั้งแต่ศตวรรษที่สิบหก

ทำ — ยืมหนึ่งหน่วย แล้วคืน. ขยายระบบชั่วคราวเพื่อให้โครงสร้างของมันปรากฏ แล้วถอนส่วนขยายออก คณิตศาสตร์ทำแบบนี้ตลอดเวลา: บวกและลบพจน์เดียวกัน คุณด้วยเลข 1 ที่เขียนอย่างแยบยล เติมจุดที่อนันต์ ใส่ตัวแปรหย่อน (slack variable) อูฐก็คือตัวแปรหย่อนที่มีขา

★★★ 41 · SEND + MORE = MONEY

ตัวอักษรแต่ละตัวแทนเลขโดดที่ต่างกัน; ตัวอักษรนำหน้าไม่เป็นศูนย์ จงแก้:

SEND + MORE = MONEY

หีบดินสอ ตัวทศคือเกมทั้งเกม

เฉลย. ตั้งชื่อตัวทศว่า c_1 (หลักหน่วยเข้าหลักสิบ) ไต่ขึ้นไปถึง c_4 (หลักพันเข้าหลักหมื่น) แล้วเดินไล่ทีละหลักจากจุดที่โครงสร้างแข็งแกร่งที่สุด

MONEY มีห้าหลัก การบวกจึงสั้น: $c_4 = 1$ และเพราะตัวทศไม่มีวันเกิน 1, **$M = 1$**

หลักพัน: $S + M + c_3 = O + 10 \cdot c_4$ ดังนั้น $S + 1 + c_3 = O + 10$ ถ้า $c_3 = 0$ แล้ว $S = O + 9$ บังคับ $O = 0$, $S = 9$ ถ้า $c_3 = 1$ แล้ว $S = O + 8$ ดังนั้น O เป็น 0 หรือ 1 — และ 1 ถูกจองแล้ว ไม่ว่าทางไหน **$O = 0$** โดย $S = 9$ หรือ 8 ยิ่งค้างตัดสิน

หลักร้อย: $E + O + c_2 = N + 10 \cdot c_3$ ซึ่งก็คือ $E + c_2 = N + 10 \cdot c_3$ ถ้า $c_3 = 1$ ผึ่งซ้ายต้องไต่ให้ถึง $10 + N$; ทางรอดเดียวคือ $E = 9$, $c_2 = 1$, $N = 0$ — แต่ 0 เป็นของ O ต้น ดังนั้น **$c_3 = 0$** ซึ่งปิดคดี **$S = 9$** และเหลือ $N = E + c_2$ ตัวอักษรแทนเลขที่ต่างกัน $N \neq E$ จึงบังคับ $c_2 = 1$ และ **$N = E + 1$**

หลักสิบ: $N + R + c_1 = E + 10 \cdot c_2 = E + 10$ แทน $N = E + 1$ ลงไป มันยุบเหลือ $R + c_1 = 9$ $R = 9$ ถูกจองแล้ว ดังนั้น **$R = 8$** และ $c_1 = 1$

หลักหน่วย: $D + E = Y + 10$ เลขโดดที่เหลือคือ {2, 3, 4, 5, 6, 7}; E กับ $N = E + 1$ ต้องเป็นคู่เรียงติดกันที่หีบจากชุดนี้ และ $D + E$ ต้องถึงอย่างน้อย 12 ลองไล่ผู้สมัคร: $E = 5$ ($N = 6$) เรียกร้อง $D = Y + 5$ และจากที่เหลือ {2, 3, 4, 7} ได้ $D = 7$, $Y = 2$ — ทุกอย่างลงตัว ตัวเลือก E อื่นทุกตัวทิ้ง D ให้ลอยเกินเลขที่ยังเหลืออยู่ คำตอบหนึ่งเดียว ยืนยันด้วยการค้นแบบถวนหัว: **$9567 + 1085 = 10652$** Dudeney ตีพิมพ์ปริศนานี้ใน Strand Magazine กรกฎาคม 1924; แนวปริศนานี้ได้ชื่อประจำตระกูล — cryptarithm — ในปี 1931

ทำ — บิบเงื่อนไขที่ตึงที่สุด. อย่าเริ่มตรงที่เดิมง่าย; จงเริ่มตรงที่โครงสร้างแข็งแกร่งที่สุด — ในที่นี้คือการลั่นเข้าหลักที่ห้า — แล้วปล่อยให้แรงบังคับไหลเป็นทอดๆ ในปัญหาเงื่อนไขบังคับใดๆ "ตัวแปรที่ถูกบีบมากที่สุดก่อน" คือค่าตั้งต้นของมืออาชีพ มือสมัครเล่นเริ่มตรงมุมที่เป็นมิตร

★★★ 48 · จำนวนที่บรรยายตัวเอง

จงหาจำนวน 10 หลักซึ่งหลักแรกบอกว่าจำนวนนั้นมีเลข 0 กี่ตัว หลักที่สองบอกว่ามีเลข 1 กี่ตัว ไล่อย่างนี้ไปเรื่อย จนหลักที่สิบนับจำนวนเลข 9

สร้างมันทีละหลัก จำนวนนี้เป็นตำราตรวจสอบความประหลาดของตัวเอง

เฉลย. เรียกหลักทั้งหลายว่า d_0 ถึง d_9 โดย d_i นับจำนวนครั้งที่เลขโดด i ปรากฏ ข้อเท็จจริงสองข้อคณวินัยการค้นหา ข้อแรก หลักทั้งหมดรวมกันได้ 10: สามะโน้นนับตำแหน่งทั้งสิบ ตำแหน่งละหนึ่งครั้งพอดี ข้อสอง — นับอีกทางหนึ่ง — ผลรวมของค่าเลขโดดในจำนวนนี้เท่ากับ $\sum i \cdot d_i$ และนั่นคือผลรวมเดิมอีกครั้ง: 10 สองยอดรวม เป็น 10 ทั้งคู่ ดังนั้นจำนวนนี้ส่วนใหญ่เป็นศูนย์: d_0 ก้อนใหญ่ กับหางที่เบา

ลอง $d_0 = 7$ เลข 7 จึงปรากฏ ดังนั้น $d_7 = 1$ และหางถัดจาก d_0 ต้องรวมได้ 3 เจ้าเลข 1 ที่นั่งอยู่ตำแหน่ง 7 แปลว่าจำนวนนี้มีเลข 1 ดังนั้น $d_1 \geq 1$ แต่ $d_1 = 1$ หักล้างตัวเอง — เขียนมันลงไปก็สร้างเลข 1 ตัวที่สองขึ้นมา — และ $d_1 = 2$ ก็เสกเลข 2 ให้อุบัติ ต้องมี $d_2 = 1$ แล้วยอดรวมพุ่งชน $7 + 2 + 1 + 1 = 11$ ตัน

ลอง $d_0 = 6$ แล้ว $d_6 = 1$ หางรวม 4 เลข 1 ที่ตำแหน่ง 6 บังคับ $d_1 \geq 1$; ตั้ง $d_1 = 2$ ซึ่งใส่เลข 2 เข้าไปในจำนวน ดังนั้น $d_2 = 1$ — และสามะโนก็ปิดจบ: $6 + 2 + 1 + 1 = 10$ อ่านออกมา: **6210001000** ตรวจมันเทียบกับตัวมันเอง: ศูนย์หกตัว หนึ่งสองตัว สองหนึ่งตัว หกหนึ่งตัว ไม่มีอย่างอื่น ลงตัว และการค้นด้วยเครื่องยืนยันว่ามันคือจำนวนแบบนี้เพียงหนึ่งเดียวในฐาน 10 ตระกูลนี้เรียกว่า autobiographical numbers — คติชนสายคณิต บันเทิงแห่งยุค Gardner

ทำ — หาจุดตรึง. เมื่อคำบรรยายเป็นส่วนหนึ่งของสิ่งที่ถูกบรรยาย จงเรียกร้อย $x = f(x)$ แล้วปล่อยให้ความคงเส้นคงวาคำหน้าที่คัดออก จุดตรึงคือจุดที่การอ้างถึงตัวเองเล็กเป็นกลเล่นในงานเลี้ยงและกลายเป็นคณิตศาสตร์: การกำหนดหมายเลขของ Gödel, ควิน (quine), ดุลยภาพ Nash, และทุกประโยค "ประโยคนี้..." ที่ทำงานได้จริง

โอกาส

ความน่าจะเป็นคือสถานที่ที่คนมึนงงมึนใจพากันไปผิด สัญชาตญาณมีปุมสามระดับ — ไม่เกิด อาจจะ เกิดแน่ — แล้วค่อยแต่งเรื่องย้อนหลังมารองรับ คณิตศาสตร์ที่มาแก้มันอายุเพ็งราว 370 ปี และไม่เคยกลายเป็นสัญชาตญาณในตัวใครเลย สำหรับปริศนาสี่ข้อถัดไป ทำสิ่งพิเศษเพิ่มหนึ่งอย่าง: ก่อนลงมือแก้ ให้พูดคำตอบที่ผุดขึ้นทันทีออกมาดังๆ แล้วจดมันลงไป ประเด็นของหมวดนี้ไม่ใช่คำตอบที่ถูก แต่คือประสบการณ์ที่บันทึกเป็นลายลักษณ์ของคำตอบที่ผิด

★★ 32 · พาราด็อกซ์วันเกิด

ต้องมีคนอยู่ในห้องกี่คน จึงจะมีโอกาสมากกว่าครึ่งที่สองคนในนั้นจะมีวันเกิดตรงกัน?

ปิกหมดตัวเลขก่อนอ่านต่อ

เฉลย. สัญชาตญาณว่าราวๆ 183 — ครึ่งหนึ่งของ 365 คำตอบคือ **23** จงคำนวณส่วนเติมเต็ม คือความน่าจะเป็นที่วันเกิดทุกคนต่างกันหมด: คนที่สองหลบคนแรกด้วยความน่าจะเป็น $364/365$ คนที่สามหลบทั้งสองด้วย $363/365$ ไล่ไปเรื่อยๆ สำหรับ 23 คน, $1 - (365/365)(364/365) \cdots (343/365) = \mathbf{0.5073}$; ที่ 22 คนได้ 0.476 ดังนั้น 23 คือจุดข้ามเส้น สัญชาตญาณพังเพราะมันนับคู่จับของคุณเอง — 22 โอกาส ซึ่งรู้สึกว่ำน้อยก็ถูกแล้ว แต่เหตุการณ์นี้อาศัยอยู่บนคู่ และคน 23 คนแบกคู่มา $C(23,2) = 253$ คู่ แต่ละคู่คือสลากลอตเตอรี่ที่ไม่มีใครเฝ้ามอง อัตราเติบโตนั้นโหดร้าย: ถึง 50 คน ความน่าจะเป็นคือ 97 เปอร์เซ็นต์; ถึง 70 คือ 99.9 ผลลัพธ์นี้มักยกเครดิตให้ Richard von Mises (1939) และถูกพาเข้าสู่คติชนโดยตำราความน่าจะเป็นของ Feller กับคอลัมน์ของ Gardner

ทำ — นับส่วนเติมเต็ม และนับคู่. "อย่างน้อยหนึ่ง" เกือบทุกครั้งแปลว่า: จำนวน ไม่มีเลย แล้วลบออกจาก 1 และเมื่อสิ่งของมีปฏิสัมพันธ์กัน สเกลของปัญหาคือ n^2 ไม่ใช่ n — เลขคณิตเบื้องหลัง hash collision, เรื่องบังเอิญในฐานข้อมูล DNA และเหตุผลที่เรื่องเล่า "โลกกลมจัง" นั้นราคาถูก

★★★ 33 · Monty Hall

ประตูสามบาน หลังบานหนึ่งคือรถยนต์; หลังอีกสองบานคือแพะ คุณเลือกหนึ่งบาน
พิธีกร — ผู้รู้วาร์ถอยุ่ไหน ต้องเปิดประตูบานหนึ่งที่คุณไม่ได้เลือก และต้องไขว่แพะ —
เปิดหนึ่งบาน: แพะ เขาเสนอให้คุณสลับไปยังบานปิดบานสุดท้าย คุณรับข้อเสนอไหม?

ตัดสินใจเดี๋ยวนี้ — สลับหรือยืนเดิม — แล้วให้คะแนนความมั่นใจตัวเอง

เฉลย. ยืนเดิมชนะ $1/3$ ของครั้งทั้งหมด; สลับชนะ $2/3$ สัญชาตญาณของเกือบทุกคน
บอกว่า ประตูปิดสองบาน ทำสับ-ทำสับ — กองจดหมายข้างล่างนี้พิสูจน์ว่าแรงกดดันนั้นแรง
แค่ไหน จงแจกแจง สมมติว่าเลือกบาน 1 ไปแล้ว รถอยู่บาน 1 (ความน่าจะเป็น $1/3$):
พิธีกรเปิด 2 หรือ 3; สลับแล้วแพ้ รถอยู่บาน 2 ($1/3$): เขาถูกบังคับให้เปิด 3; สลับแล้ว
ชนะ รถอยู่บาน 3 ($1/3$): ถูกบังคับให้เปิด 2; สลับแล้วชนะ สองโลกจากสาม การสลับคว้า
รถ

ความรู้สึกทำสับ-ทำสับปฏิบัติต่อการเปิดของพิธีกรราวกับเป็นฉากประกอบ มันไม่ใช่ การ
เลือกครั้งแรกของคุณผิด $2/3$ ของครั้งทั้งหมด และในทุกโลกเหล่านั้นมือของพิธีกรถูก
บังคับ — ทางเลือกของเขาอัตราความน่าจะเป็น $2/3$ ที่เหลือทั้งหมดลงบนประตูบานที่เขา
ไม่ได้รับอนุญาตให้เปิด ขยายเสียงจนสัญญาณดังแสบแก้วหู: ประตูร้อยบาน คุณเลือก
หนึ่ง แล้วพิธีกรผู้รู้เหวี่ยงเปิดแพะเก้าสิบแปดตัว เหลือประตูปิดไว้หนึ่งบาน ประตูของคุณ
เก็บ $1/100$ ของมันไว้ตามเดิม ผู้รอดชีวิตแบก $99/100$ ไม่มีใครรู้สึกทำสับ-ทำสับที่ประตู
ร้อยบาน; สามบานคือเครื่องจักรเดียวกันที่ถูกหรีเสียดลง

เงื่อนไขบังคับคือทุกสิ่ง ลองเทียบกับ "Monty Fall": พิธีกรที่ลั่นลัม เปิดประตูบาน
อื่นแบบสุ่ม แล้วบังเอิญเผยแพะ ฉากดูเหมือนเดิมทุกกระเบียด — และคราวนี้คำตอบเป็น
 $1/2$ จริงๆ ภาพเดียวกัน ขั้นตอนต่างกัน ความน่าจะเป็นต่างกัน

ประวัติศาสตร์ วัปลอปใจ Steve Selvin ตั้งปัญหาใน The American Statistician,
1975 (ปู่ของมันเป็นพาราด็อกซ์กล่องของ Bertrand, 1889) เมื่อ Marilyn vos Savant ตี
พิมพ์คำตอบที่ถูกต้องใน Parade เดือนกันยายน 1990 จดหมายราวหนึ่งหมื่นฉบับ
หลังไหลมาบอกว่าเธอผิด — ราวหนึ่งพันฉบับมาจากคนจบปริญญาเอก เธอไม่ได้ผิด ว่า
กันว่า Paul Erdős ยังไม่ยอมเชื่อจนกระทั่งได้เห็นซิมูเลชันคอมพิวเตอร์ ถ้าปริศนานี้เอา

ชนะสัญชาตญาณของ Erdős ได้ มันก็มีสิทธิ์เอาชนะของคุณ สิ่งที่สำคัญคือคราวหน้าจะเชื่อเครื่องมือขึ้นไหน

ทำ — วางเงื่อนไขบนกระบวนการ ไม่ใช่บนภาพ. หลักฐานไม่ใช่สิ่งที่ตาเห็น; มันคือความน่าจะเป็นที่จะได้เห็นสิ่งนั้นภายใต้สมมุติฐานแต่ละข้อ เมื่อคำนึงถึงกระบวนการที่ผลิตมันขึ้นมา การสังเกตที่เหมือนกันจากโปรโทคอลต่างกันแบบสารสนเทศต่างกัน จงถามว่าเครื่องจักรแบบไหนสร้างการเปิดเผยนั้น — ในห้องประชุมบอร์ดและผลตรวจชิ้นเนื้อ ไม่แพ้ในเกมโป๊กเกอร์ นี่อาจเป็นนิสัยเชิงความน่าจะเป็นที่มีค่าใช้งานจริงที่สุดในเล่มนี้

★★★ 35 · พาราไดซ์ของ Simpson

การรักษาnivในไตสองวิธี ข้อมูลคลินิกจริง การผ่าตัดเปิดขณะการผ่าตัดส่องกล้องทั้งในนิ่วก้อนเล็กและนิ่วก้อนใหญ่ แต่ภาพรวม ส่องกล้องชนะ ตัวเลขทั้งหกถูกต้องหมด:

อัตราสำเร็จ	นิ่วก้อนเล็ก	นิ่วก้อนใหญ่	ผู้ป่วยทั้งหมด
ผ่าตัดเปิด	93% (81/87)	73% (192/263)	78% (273/350)
ส่องกล้อง (PCNL)	87% (234/270)	69% (55/80)	83% (289/350)

วิธีไหนดีกว่ากัน — และตัวเลขทำแบบนี้ได้อย่างไร?

ลองตรวจเลขด้วยตัวเอง มันลงตัวหมดจริงๆ

เฉลย. เลขคณิตไม่มีอะไรผิด; สิ่งที่ผิดคือคำถาม "แถวไหนชนะ?" ที่ถูกยิงใส่คอลัมน์สุดท้าย การกลับทิศมาจาก**ส่วนผสมของเคส** การผ่าตัดเปิดถูกมอบหมายเคสยากเป็นหลัก — ผู้ป่วย 263 จาก 350 ของมันมีนิ่วก้อนใหญ่ — ขณะที่ส่องกล้องได้เคสง่ายเป็นหลัก 270 จาก 350 เป็นก้อนเล็ก คอลัมน์ "ผู้ป่วยทั้งหมด" จึงเอาผ่าตัดเปิด-บนเคสยากไปเทียบกับส่องกล้อง-บนเคสง่าย และความรุนแรงของโรค ไม่ใช่วิธีรักษา คือตัวขับเคลื่อนยอดรวม ความรุนแรงเป็นตัวแปรกวน (confounder): มันขึ้นำการเลือกวิธีการรักษา และมันก็ทำให้ผลลัพธ์แย่งด้วย เมื่อเป็นเช่นนั้น คอลัมน์ที่แยกชั้นแล้วคือการ

เปรียบเทียบที่ชื่อเสียง — ผ่าตัดเปิดชนะ — ส่วนภาพรวมตอบคำถามอีกข้อหนึ่ง ซึ่งมักเป็นข้อที่ผิด ข้อมูลจาก Charig et al., BMJ, 1986; ปรากฏการณ์นี้แบกชื่อของ Simpson (1951) โดยสถิติค้นพบก่อนเป็นของ Yule (1903) และมันเดินอยู่บนโลกจริง: คดีการรับเข้าเรียนของ Berkeley ปี 1973 ที่ผู้หญิงสมัครเข้าภาควิชาที่แข่งขันสูงกว่า (Bickel et al., Science, 1975), ค่าเฉลี่ยการตีเบสบอล, และ A/B test ทุกอันที่ถูกแบ่งกลุ่มย้อนหลัง

ทำ — แยกชั้นก่อนเปรียบเทียบ. ตรวจสอบตัวส่วน; ออกล่าตัวแปรที่สามที่คอยดันเคสเข้ากลุ่ม และเคารพวินัยด้านกลับด้วย: การรวบยอดไม่เคยเป็นกลาง — มีใครบางคนเลือกระดับที่ความจริงจะถูกอ่าน เมื่อพบสรุปกับส่วนย่อยขัดกัน จงถามว่าอันไหนตอบคำถามที่กำลังถูกถามอยู่จริง

★★★★ 34 · เด็กชายวันอังคาร

พ่อแม่คนหนึ่งพูดว่า: "ฉันมีลูกสองคน หนึ่งในนั้นเป็นเด็กชายที่เกิดวันอังคาร" ความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสองเป็นชายคือเท่าไร? และ — เอาจริงๆ นะ — วันอังคารสำคัญด้วยหรือ?

คำตอบแรกของคุณผิด คำตอบที่สองก็คงผิดเช่นกัน

เฉลย. สัญชาตญาณว่าวันในสัปดาห์เป็นแค่ของประดับ: คนหนึ่งเป็นชาย ดังนั้นอีกคนเป็นชายด้วยความน่าจะเป็น $1/2$ สัญชาตญาณที่ฝึกมาดีกว่าหนอยิ่งถึงปริศนาลูกสองคนฉบับคลาสสิกแล้วตอบ $1/3$ คำตอบจากการแจกแจงจริงคือ $13/27 \approx 0.481$ — และวันอังคารกำลังทำงานจริงๆ

จงเอาปริภูมิตัวอย่างมาพิจารณาอย่างจริงจัง: เด็กแต่ละคนคือคู่เพศ-กับ-วันในสัปดาห์ 14 แบบที่น่าจะเป็นเท่ากัน ดังนั้นคู่อันดับของเด็กสองคนมี 196 แบบ ครอบครัวที่มีเด็กชายวันอังคารอย่างน้อยหนึ่งคน: $14 + 14 - 1 = 27$ (ลูกคนแรกเป็นเด็กชายวันอังคาร หรือคนที่สองเป็น ลบหนึ่งครอบครัวที่ถูกนับซ้ำ — ครอบครัวที่เป็นทั้งคู่) ในบรรดา 27 นั้น ครอบครัวลูกชายทั้งคู่มี $7 + 7 - 1 = 13$ จึงได้ $13/27$: อยู่ระหว่าง $1/3$ กับ $1/2$ อย่างเคร่งครัด กลไกทั้งหมดคือเลข 1 ที่ถูกลบตัวนั้น ยิ่งรายละเอียดที่เอ่ยถึงเจาะจงมากเท่าไร คำตอบยิ่งคืบเข้าใกล้ $1/2$ เพราะรายละเอียดที่เจาะจงพอจะเท่ากับระบุชื่อว่าเด็กคน

ไหนกำลังถูกพูดถึง — และเมื่อเด็กคนหนึ่งถูกปิดกั้นแล้ว อีกคนก็เป็นเหรียญโยนธรรมดาๆ "คนหนึ่งเป็นชาย" ทั้งความกำกวมไว้มากที่สุด (1/3); "คนหนึ่งเป็นชายเกิดเวลา 6:52 เข้าวันอังคาร" แทบเป็นชื่อเฉพาะ ($\approx 1/2$); วันอังคารเดียวๆ นั่งอยู่ตรงกลาง

ที่นี้ถึงความซื่อสัตย์ที่จำเป็น 13/27 ตอบคำถามเชิงสามะโน: ในบรรดาครอบครัวลูกสองคนทั้งหมดที่มีเด็กชายเกิดวันอังคารอย่างน้อยหนึ่งคน สัดส่วนที่มีลูกชายสองคนคือเท่าไร แต่ถ้าพ่อแม่แค่เอ่ยชื่อเท็จจริงเกี่ยวกับลูกคนหนึ่งขึ้นมาเอง กระบวนการคัดเลือกก็ต่างออกไป และตัวเลขก็ต่างตาม — โดยทั่วไปวิ่งกลับไป 1/2 ตรงๆ ปริศนานี้ไม่มีคำตอบหนึ่งเดียวจนกว่ากระบวนการสุ่มตัวอย่างจะถูกระบุ $\triangle$ Gardner ผู้แนะนำพาราไดออกซ์เด็กชาย-เด็กหญิงต้นทางในปี 1959 ภายหลังถอนคำตอบ 1/3 ของตัวเองว่ากำกวม ด้วยเหตุผลนี้เป๊ะ Gary Foshee จุกระเบิดฉบับวันอังคารจากเวที Gathering 4 Gardner ในปี 2010 และการถกเถียงระดับโลกที่มันจุดขึ้นก็คือบทเรียนในตัวมันเอง

ทำ — การสุ่มตัวอย่างกำหนดแต้มต่อ. ก่อนคำนวณความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขใดๆ จงเขียนกระบวนการที่ผลิตข้อความนั้นลงกระดาษก่อน ข้อมูลไม่เคยพูดด้วยตัวมันเอง; มันพูดผ่านกลไกการคัดเลือกของมัน — บทเรียนเดียวกันที่หวนกลับมาเป็น survivorship bias, พาราไดออกซ์ Berkson และครึ่งหนึ่งของสถิติที่ถูกอ่านผิดทั้งหมด

การประมาณ

พันขอบของข้อมูลที่มีอยู่ออกไปคือชีวิตจริงส่วนใหญ่ สิ่งที่มาแทนความแม่นยำตรงนั้นไม่ใช่การเดา; มันคือความหยابที่ถูกควบคุม

★★ 46 • ข้างจุนเปียนของ Fermi

มีข้างจุนเปียนทำงานอยู่ในชิคาโกกี่คน? ห้ามเปิดหาอะไรทั้งนั้น — ข้อห้ามนั้นแหละคือแบบฝึกหัดทั้งหมด

กระดาษหนึ่งหน้า ดินสอหนึ่งแท่ง ไม่มีช่องค้นหา

เฉลย. สร้างลูกโซ่ของตัวประกอบ แต่ละตัวปกป้องได้ภายในตัวคูณสองหรือสาม ชิคาโก: ราว 3 ล้านคน ที่ราว 3 คนต่อครัวเรือน ดีเป็น 1 ล้านครัวเรือน อาจมีสัก 1 ใน 20 ที่มี

เปียโน: 50,000 หลัง โดยโรงเรียน โบสถ์ และหอแสดงคอนเสิร์ตเติมอีกไม่กี่พัน เปียโนหนึ่งหลังอยากถูกจูนราวปีละครั้ง ดังนั้น ~50,000 งานจูนต่อปี ช่างหนึ่งคนรับได้ราว 4 งานต่อวัน ตลอด 250 วันทำงาน: 1,000 งานต่อปี อุปสงค์หารกำลังผลิต: $50,000 \div 1,000 \approx 50$ คน คำตอบที่ซื้อสัตย์เป็นแถบ ไม่ใช่จุด — 30 ถึง 150 อันดับขนาด 10^2 — และสมุดโทรศัพท์ชิคาโกยุคเก่าก็เห็นด้วย โดยลงรายชื่อไว้หลายสิบถึงร้อยเศษๆ Enrico Fermi ใช้คำถามแบบนี้ขับเคลื่อนห้องเรียนชิคาโกของเขาในทศวรรษ 1940; รีเฟล็กซ์เดียวกันทำให้เขาประมาณแรงระเบิดของ Trinity ได้ในวันที่ 16 กรกฎาคม 1945 จากระยะที่คลื่นกระแทกพัดเศษกระดาซที่ปล่อยให้ร่วงลงมา

ทำไมมันได้ผล: ตัวประกอบแต่ละตัวหลวมราวตัวคูณ ~ 2 แต่ความคลาดเคลื่อนเป็นอิสระต่อกัน — บ้างสูง บ้างต่ำ — และหักล้างกันเองบางส่วนในผลคูณ อันดับขนาดจึงรอดชีวิต แม้อินพุตทุกตัวจะเป็นการเดา และวินัยนี้จ่ายผลตอบแทนสองต่อ: การประมาณที่ทำก่อนการคำนวณจริงจึงคือสัญญาณเตือนภัยที่ภายหลังจะจับจุดทศนิยมที่เลือนหลุดของการคำนวณนั้นได้

ทำ — แยกส่วน ประมาณ คุณ. แปลง "รู้ไม่ได้" ให้เป็นลูกโซ่ของตัวประกอบที่เดาได้ทีละตัว; คิดเป็นกำลังของสิบ; ประกาศเป็นแถบและปฏิเสธจุดจุ่มปลอม มั่นใจภายในสามเท่า ชนะ แม่นยำแต่ผิดไปเป็นล้านเท่า

รูปทรง

ดวงตาเป็นพยานที่มั่นใจและเชื่อถือไม่ได้ สองข้อปิดท้าย: ปริศนาที่รูปภาพโกหก และปริศนาที่อาร์กิวเมนต์สองบรรทัดมองไกลกว่าทุกรูปภาพที่จะมีวันถูกวาดขึ้น

★★★ 22 · สี่เหลี่ยมที่หายไป

ชิ้นส่วนแบนสี่ชิ้น: สามเหลี่ยมมุมฉากยาว 8 หน่วย สูง 3; สามเหลี่ยมมุมฉากยาว 5 สูง 2; และชิ้นรูปตัว L สองชิ้นขนาด 7 และ 8 ช่องหน่วย จัดวางแบบหนึ่ง พวกมันเต็มเต็มสิ่งที่ดูเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากยาว 13 หน่วย สูง 5 จัดวางใหม่ ชิ้นเดิมทั้งสี่ประกอบเป็น "สามเหลี่ยม" 13 คูณ 5 เดิม — แต่มีช่องหน่วยภายในว่างอยู่หนึ่งช่อง ตัดจากกระดาซกราฟดู: ทั้งสองแบบดูไร้ที่ติ สี่เหลี่ยมช่องนั้นหายไปไหน?

สี่เหลี่ยมทั้งช่องจะซ้อนตัวได้ที่ไหนกัน?

เฉลย. ในด้านตรงข้ามมุมฉาก รูปทั้งสองไม่ใช่สามเหลี่ยมสักรูป ขอบเอียงของชิ้น 8×3 ได้ด้วยความชัน $3/8 = 0.375$; ของชิ้น 5×2 ด้วย $2/5 = 0.4$ วางต่อกันปลายชนปลาย พวกมันประกอบเป็นเส้นที่หักงอ — เพียงเกินหนึ่งองศาทีเดียว ต่ำกว่าที่ตาจะแยกออกที่ความหนาของเส้นดินสอมาก ในการจัดวางแบบหนึ่ง ด้านตรงข้ามมุมฉากจอมปลอมแอ่นเข้า รูปลือพื้นที่ 32; อีกแบบโป่งนูนออก พื้นที่ 33 สามเหลี่ยม 13×5 ของแท้มือ $13 \times 5 \div 2 = 32.5$: เจ้าตัวปลอมทั้งสองนั่งห่างคนละครึ่งหน่วยสองฟากของมัน สี่เหลี่ยมที่หายไปไม่เคยไปไหน มันถูกละเลงไปตามแนวตะเข็บ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนานบางเฉียบ พื้นที่ 1 พอดี เป้า Paul Curry นักมายากลสมัครเล่นชาวนิวยอร์ก สร้างเอฟเฟกต์นี้ในปี 1953; Gardner ให้คำอธิบายฉบับคลาสสิกไว้ใน Mathematics, Magic and Mystery (1956); ปู่ของมันคือการด้นกรบสาบสูญ Get Off the Earth ของ Sam Loyd (1896)

ทำ — ตรวจสอบแผนภาพ. รูปภาพคือคำกล่าวอ้าง ไม่ใช่บทพิสูจน์ จงบวกพื้นที่; ตรวจสอบความชัน; ลงมือวัด ฉบับของนักมายากลเล่นอย่างแฟร์ — มันประกาศตัวเองว่าเป็นกล แต่กราฟในสไลด์นำเสนอที่แสดงสิ่งที่ทุกคนหวังจะเห็นเป๊ะๆ ไม่ประกาศอะไรแบบนั้นเลย

★★ 20 • กระดานหมากรุกแหวง

หยิบกระดานหมากรุกแล้วตัดช่องมุมที่อยู่ตรงข้ามกันตามแนวทแยงออกสองช่อง เหลือ 62 ช่อง คุณมีโดมิโน 31 ตัว แต่ละตัวคลุมสองช่องที่ขอบติดกันพอดี โดมิโน 31 ตัวจะปูเต็มกระดานแหวงนี้ได้ไหม?

ลองปูในหัวสักรูปสามแบบก่อนตอบ

เฉลย. ไม่ได้ — และบทพิสูจน์ไม่ลองปูแม้แต่แบบเดียว มุมสองมุมที่ถูกตัดออกมีสีเดียวกัน; มุมตรงข้ามของกระดานหมากรุกเป็นเช่นนั้นเสมอ สิ่งที่เหลือคือ 32 ช่องสีหนึ่งกับ 30 ช่องอีกสี โดมิโนทุกตัว ไม่ว่าวางตรงไหน คลุมช่องเข้มหนึ่งช่องกับช่องอ่อนหนึ่งช่องพอดี — ความติดกันของช่องการันตีให้ ดังนั้นโดมิโน 31 ตัวคลุม 31 เข้มกับ 31 อ่อน แต่กระดานมีให้ 32 กับ 30 จบ

จารู้สึกกับสิ่งที่เพิ่งเกิดขึ้น หากลองด้วยมือ ความพยายามครั้งแล้วครั้งเล่าจะล้มเหลวโดยไม่มีวันเผยว่าความล้มเหลวนั้นเป็นของกระดานหรือของความพยายาม การพิสูจน์ด้วยการระบายสีหักล้างการจัดวางทั้งหมดในคราวเดียว — โดยตรวจสอบมันเป็นจำนวนศูนย์แบบ — ด้วยการชูปริมาณหนึ่งที่ไม่มีการวางถูกกติกาใดเปลี่ยนแปลงได้ นี่คือเหตุผลที่ John McCarthy เสนอปริศนานี้เป็นเบนช์มาร์ก (benchmark) สำหรับเครื่องพิสูจน์ทฤษฎีบทอัตโนมัติ: เครื่องจักรที่ทำได้แค่ค้นการจัดวางย่อมมองไม่เห็นการระบายสี ปริศนานี้ตั้งโดยนักปรัชญา Max Black (Critical Thinking, 1946) แพร่ต่อโดย Gamow & Stern และคอลัมน์ปี 1957 ของ Gardner และมันยังคงเป็นวินาที "อ้อ!" สองประโยคที่สะอาดที่สุดในคณิตศาสตร์

ทำ — หาปริมาณไม่แปรเปลี่ยน (invariant). จะพิสูจน์ว่าสิ่งหนึ่งเป็นไปได้ จงหาปริมาณที่ทุกการเดินถูกกติกาอนุรักษ์ไว้ แล้วแสดงว่าจุดเริ่มกับเป้าหมายขัดแย้งกันบนปริมาณนั้น บทที่ 9 จะตีแปลวปึงวบเดียนี่ขึ้นรูปเป็นคลังแสง — การระบายสีภาวะคู่ (parity) และผลรวมอนุรักษ์ ที่ประหารงานเป็นไปได้ทั้งตระกูลได้ภายในย่อหน้าเดียว

ทำที่ตอนนี้ของคุณแล้ว

- ยืมหนึ่งหน่วย แล้วคืน (★ 26, อุฐ) — ขยายระบบ อ่านโครงสร้างของมัน แล้วถอนเงินยืมคืน
- บีบเงื่อนไขที่ตึงที่สุด (★★★ 41, SEND+MORE) — เริ่มตรงที่โครงสร้างแข็งแกร่ง แล้วปล่อยให้แรงบังคับไหลเป็นทอด
- หาจุดตรึง (★★★ 48, จำนวนที่บรรยายตัวเอง) — เมื่อคำบรรยายบรรยายตัวมันเอง จงเรียกร่องความคงเส้นคงวา: $x = f(x)$
- นับส่วนเต็มเต็ม และนับคู่ (★★ 32, วันเกิด) — "อย่างน้อยหนึ่ง" แปลว่าจำนวน "ไม่มีเลย"; ปฏิสัมพันธ์สเกลเป็น n^2
- วางเงื่อนไขบนกระบวนการ ไม่ใช่บนภาพ (★★★ 33, Monty Hall) — หลักฐานคือความน่าจะเป็นที่จะได้เห็นภาพนั้นภายใต้สมมุติฐานแต่ละข้อ

- แยกชั้นก่อนเปรียบเทียบ (★★★ 35, Simpson) — หาตัวแปรที่ต้นเคสเข้ากลุ่ม; อย่าไว้ใจภาพรวมที่ประจบประแจง
- การสุ่มตัวอย่างกำหนดแต้มต่อ (★★★★ 34, เด็กชายวันอังคาร) — ไม่มีความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขโดยปราศจากกระบวนการกำเนิดข้อมูล
- แยกส่วน ประมาณ คุณ (★★ 46, ช่างจูนเปียโน) — กำลังของสิบ; แถบ ไม่ใช่จุด
- ตรวจสอบแผนภาพ (★★★ 22, สี่เหลี่ยมที่หายไป) — รูปภาพคือคำกล่าวอ้าง
- หาปริมาณไม่แปรเปลี่ยน (★★ 20, กระดานหมากรุก) — ความเป็นไปไม่ได้โดยการอนุรักษ์

มีท่าเหนือท่าหนึ่งทำติดสอยห้อยตามมากับทั้งสิบ ทุกความล้มเหลวของสัญชาตญาณในบั้นประกาศตัวเองมาในคราบความแน่ใจ — คำตอบที่รู้สึกชัดเจนที่สุดคือกับดัก ทุกครั้งไป ยิ่งเสียงคลิกของความชัดเจนรอบตัวเลขใดดังเท่าไร มันยิ่งสมควรได้รับการตรวจสอบสองบรรทัดมากขึ้นเท่านั้น

บทที่ 7

ห้องบอส

เหล่านี้คือปริศนาที่นักคณิตศาสตร์เล่าสู่กันฟัง แต่ละข้อเคยหยุดห้องพักอาจารย์ที่เต็มไปด้วยมืออาชีพมาแล้วทั้งห้อง; หลายข้อของวรรณกรรมวิชาการเป็นของตัวเอง; ข้อสุดท้ายด้านทานทุกข้อเสนอคลี่คลายมาเกือบแปดสิบปี และปิดบทนี้ทั้งที่ตัวมันยังเปิดอยู่ เรตติงในห้องนี้อ่านว่า ★★★★★ กับ ★★★★★ และมันวัดความลึก ไม่ใช่ความรู้พื้นฐาน — ไม่มีอะไรในห้องนี้ต้องการเกินกว่าเลขคณิต สิ่งของแต่ละปริศนาเรียกร้องคือทำที่หน้าจะยังไม่อยู่ในกระเปาะเครื่องมือของคุณ ลงมือไปตามโซ่เหตุผลยาวเหยียดโดยรวดเร็วเป็นศูนย์

ห้องนี้มีกฎ หนึ่งปริศนาต่อการนั่งหนึ่งครั้ง อ่านโจทย์ แล้วปิดหนังสือ แบกปัญหาไว้กับตัว หนึ่งวันก่อนอ่านต่อ: คุณค่าถูกผลิตขึ้นระหว่างความพยายาม ไม่ใช่ที่ตัวคำตอบ การแก้ไขข้อใดข้อหนึ่งในนี้ได้สดๆ เป็นเรื่องหายาก และนั่นไม่ใช่เกณฑ์วัด เกณฑ์คือการมาพบเฉลยแต่ละข้อโดยมีความพยายามที่ล้มเหลวมากพอหนุนหลัง จนไอเดียถูกแฉ เมื่อมันมาถึง ได้ตอบคำถามที่คุณถามไปแล้วจริงๆ บอสที่ถูกศึกษาถ่ายโอนได้เกือบดีเท่าบอสที่ถูกโค่น

ข้อสังเกตหนึ่งข้อก่อนประตูจะเปิด แทบทุกสถานการณ์ในห้องนี้คุกคามชีวิตตัวละครของมัน — นักโทษ โจรสลัด ชาวเกาะใต้กฤษฎีกา ชายผู้ต้องโทษประหาร แนวเรื่องกำลังซื่อสัตย์กับระดับความสูงที่โตมาถึง: ที่ระดับนี้ไม่มีคะแนนปลอมใจ หกในเจ็ดเฉลยข้างล่างแน่นหนาไร้รอยรั่ว เป็นความแน่นอนโดยการก่อสร้าง ข้อที่เจ็ดแลกความแน่นอนกับปาฏิหาริย์ 31 เปอร์เซนต์ — แล้วพิสูจน์ว่าไม่มีกลยุทธ์ใดบนโลกนี้ทำได้ดีกว่าอย่างมีนัยสำคัญ

★★★★ 8 • ลูกบอลสิบสองลูก

ลูกบอลสิบสองลูกหน้าตาเหมือนกันหมด; หนึ่งลูกพอดีน้ำหนักเพี้ยน — หนักกว่าหรือเบากว่า ไม่รู้ว่าทางไหน มีตาชั่งสองแขนหนึ่งเครื่อง และชั่งได้สามครั้งเท่านั้น จงระบุลูกที่เพี้ยน และ ว่ามันหนักหรือเบา แบบการันตีผล

ข้อนี้คุ้มค่ากับหนึ่งคืนเต็มๆ มอบให้มันสักคืน

เฉลย. ก่อนความเฉลียวฉลาดใดๆ ให้ทำงานก่อน คำตอบที่เป็นไปได้มี 24 แบบ: สิบสองลูก แต่ละลูกอาจหนักหรือเบา การชั่งหนึ่งครั้งมีผลลัพธ์สามทางพอดี — ซ้ายจม ขวาจม สมดุล — ดังนั้นสามการชั่งแยกแยะอนาคตได้อย่างมากที่สุด $3^3 = 27$ แบบ ขณะที่สองครั้งจัดการได้เพียง 9 สามคือพื้นขั้นต่ำ และ $24 \leq 27$ บอกว่าพื้นนั้นเฉียดฉิวพอดี: ห้ามการชั่งครั้งใดผลลุลายสารสนเทศทั้ง หลังผลลัพธ์ทุกทาง กรณีที่รูดต้องเหลืออย่างมาก 9 แล้ว 3 แล้ว 1

เลขคณิตนั้นออกแบบการเดินหมากแรกให้เองเสร็จสรรพ ชั่งหกกับหก สมดุลเป็นไปได้ไหม: การเอียงเกิดแน่ สิบสองกรณีรูดผ่านมัน และสิบสองอัดผ่านอนาคต 9 ทางที่สองการชั่งที่เหลือมีให้ไม่ได้ ตายตั้งแต่ยังไม่เริ่ม ห้ากับห้า? เอียงแล้วเหลือสิบ ตาย สี่กับสี่: เอียงเหลือแปด (สี่ผู้ต้องสงสัยขอหาหนัก สี่ขอหาเบา) และสมดุลก็เหลือแปด (สี่ลูกที่ไม่ถูกแตะเป็นได้ทั้งสองทาง) รูดทุกกิ่ง ขอบเขตเชิงสารสนเทศบังคับการแบ่ง 4-4 ก่อนที่ความช่างประดิษฐ์จะถูกเรียกปรึกษาเสียด้วยซ้ำ

การชั่งครั้งแรก: {1,2,3,4} กับ {5,6,7,8}

ถ้าสมดุล — ลูกเพี้ยนอยู่ใน 9-12 แปรกรณี การชั่งครั้งสอง: {9,10,11} กับ {1,2,3} สามผู้ต้องสงสัยเทียบกับตุ้มถ่วงที่รู้แล้วว่าดี สมดุล → 12 คือตัวเพี้ยน; ชั่ง 12 กับลูกดีลูกใดก็ได้ เพื่ออ่านทิศทาง ซ้ายจม → หนึ่งใน 9, 10, 11 หนัก; ชั่ง 9 กับ 10 — จานที่หนักกว่าชี้ตัวผู้ร้าย สมดุลตัดสินให้ 11 ผิด ขวาจม → สามตัวเดิมกลายเป็นผู้ต้องสงสัยขอหาเบา; ทำแบบกระจกเงา

ถ้าฝั่งซ้ายจม — ไม่ 1-4 หนัก ก็ 5-8 เบา แปรกรณี การชั่งครั้งสองต้องคละผู้ต้องสงสัยข้ามจาน: **{1,2,5} กับ {3,4,6}** พัก 7 กับ 8 ไว้ข้างสนาม สมดุล → 7 หรือ 8 เบา; ชั่ง 7 กับ 8 ตัวที่เบากว่าคือผู้ร้าย (พวกมันสมดุลกันไม่ได้) ซ้ายจมอีกครั้ง → 1 หรือ 2 หนัก หรือ 6 เบา; ชั่ง 1 กับ 2 — ตัวหนักกว่าผิด สมดุลตัดสิน 6 เบา ขวาจม → 3 หรือ 4 หนัก หรือ 5 เบา; ชั่ง 3 กับ 4 — ตัวหนักกว่าผิด สมดุลตัดสิน 5 เบา นับกิ่งก้าน: $2 + 3 + 3 = 8$ ทุกกรณีลงจอดครบ

ถ้าฝั่งขวาจม — ภาพกระจกเงา

สองไอเดียแบกการออกแบบนี้ไว้ ลูกที่พันข้อสงสัยแล้วกลายเป็นเครื่องมือ — ตุ่มถ่วงที่รู้
 แน่ว่าดี ซึ่งทำให้ซึ่งผู้ต้องสงสัยสามตัวเทียบกับ "ความจริง" ได้ และผู้ต้องสงสัยถูก
 หมุนเวียนสลับงานเพื่อให้แต่ละผลลัพธ์ผ่านผู้รอดออกเป็นเกือบสามส่วนเท่าๆ กัน นี่คือ
 ปัญหาที่นักคณิตศาสตร์ยุคสงครามพูดเล่นกันว่าน่าจะโปรยทางอากาศเหนือเยอรมนีเพื่อ
 ทำให้งานวิจัยของศัตรูเป็นอัมพาต; การวิเคราะห์อย่างเป็นระบบของ Freeman Dyson
 ลงพิมพ์ใน Mathematical Gazette, 1946 — การคิดเชิงทฤษฎีสารสนเทศ สองปีก่อน
 Shannon จะตั้งชื่อให้สาขานั้น

ทำ — ริดสารสนเทศสูงสุดต่อการทดสอบ. ทำบผลลัพธ์ก่อนออกแบบการทดลอง
 แล้วปั่นทุกการทดสอบให้ผลลัพธ์ของมันรับน้ำหนักเท่ากันที่สุดเท่าที่จะทำได้ นี่คือ
 การออกแบบการทดลองฉบับจิ๋ว และมันโผล่ซ้ำทุกที่ที่คำถามมีราคาต้องจ่าย: การตี
 บัก การคัดแยกผู้ป่วยฉุกเฉิน และเกมยีสืบคำถามทุกรูปแบบ

★★★★ 44 • เกมโจรสลัด

โจรสลัดห้าคน มีเหตุผลสมบูรณ์แบบ จัดลำดับชั้นเคร่งครัด: A อวูโสสุด ตามด้วย B, C, D, E พวกเขาต้องแบ่งเหรียญทอง 100 เหรียญ โจรสลัดอวูโสสุดเสนอวิธีแบ่ง; ทั้งห้า
 โหวต; คะแนนเสมอถือว่าผ่าน โดยเสียงของผู้เสนอเป็นเสียงชี้ขาด ถ้าข้อเสนอตก ผู้เสนอ
 ถูกโยนลงทะเล แล้วคนถัดไปตามลำดับชั้นขึ้นเสนอแทน ลำดับความสำคัญของโจรสลัด
 ทุกคน เรียงตามนี้: เอาชีวิตรอด; จากนั้นกอบโกยทองให้มากที่สุด; จากนั้น หากอย่างอื่น
 เท่ากันหมด ก็สนุกกับการได้เห็นคู่แข่งถูกโยนลงทะเล A จะเสนออะไร?

ใช้เวลาตามสบาย ทองไม่หนีไปไหน

เฉลย. การให้เหตุผลเดินหน้าจมน้ำตาย — "B จะทำอะไร ซึ่งขึ้นกับว่า C จะทำอะไร ซึ่ง
 ขึ้นกับ..." หมุนวนโดยไร้สมอ จงทอดสมอที่ตอนจบ ตรงที่เกมกลายเป็นเรื่องจืดจาง แล้ว
 ม้วนย้อนกลับมา

เหลือโจรสลัดสองคน (D, E): D เสนอ 100–0 ให้ตัวเอง โหวตรับเอง และคะแนนเสมอ
 ผ่าน ความเห็นของ E เป็นเพียงเครื่องประดับ

สามคน (C, D, E): ถ้า C ตาย รัชสมัยของ D จะให้ E ศูนย์ — ดังนั้นเสียงของ E มีราคาหนึ่งเหรียญพอดี ซึ่งชนะ "ความว่างเปล่า" ที่ D สัญญาไว้ (เกณฑ์ชี้ขาดกระหายเลือดใช้ได้เฉพาะเมื่ออย่างอื่นเท่ากันหมดเท่านั้น) C เสนอ **99-0-1** และผ่าน 2-1 D สวนราคาไม่ได้: อนาคตรอบถัดไปของเขาเองคือ 100 ดังนั้น C ไม่มีวันซื้อเขาไหว

สี่คน (B, C, D, E): ถ้า B ตาย ระบอบของ C จ่าย D ศูนย์ D จึงกลายเป็นเสียงราคาถูก: **99-0-1-0** ผ่าน 2-2 ด้วยเสียงชี้ขาดของ B การซื้อ E แทนจะแพงถึง 2 เพราะ E เก็บ 1 อยู่แล้วภายใต้ C

ห้าคน: ถ้า A ตาย แผนของ B จ่าย C ศูนย์และ E ศูนย์ A ต้องการสามเสียงจากห้า — ของตัวเองบวกอีกสอง — และคนอนาถาสองคนภายใต้ B ก็คือ C กับ E พอดี ราคาคนละหนึ่งเหรียญ **A เสนอ 98-0-1-0-1** และผ่าน 3-2

ความซื่ออยู่ที่ทิศทาง ผู้เล่นที่เปราะบางที่สุด — คนแรกที่ต้องเผชิญไม่กระดานพาดกราบเรือ — คว่าไป 98 เปอร์เซ็นต์ ขณะที่โจรสลัดผู้ถือ "อำนาจต่อรองชัดๆ" เก็บได้เหรียญเดียวหรือไม่ได้เลย กติกาการโหวตบอกความรู้ร่วม (common knowledge) เรื่องความมีเหตุผล จัดสรรอำนาจในแบบที่สัญญาอนุญาตเรื่องอาวุโสไม่มีวันทำนายถูก บทเรียนที่สองข้อได้ถูกกว่าที่นี้เมื่อเทียบกับโต๊ะเจรจาจริง: ทฤษฎีบทนี้เปราะ มนุษย์จริงปฏิเสธข้อเสนอก่อนหน้าด้วยความแค้น — การทดลองเกมคำขาด (ultimatum game) แสดงให้เห็นซ้ำแล้วซ้ำเล่า — ดังนั้นการอุปนัยย้อนกลับขึ้นได้ไกลเพียงเท่าที่ข้อตั้งของมโนยิน จงรู้ว่าเมื่อไรเกมเป็นโจรสลัด และเมื่อไรเป็นมนุษย์ ปัญหานี้เป็นคติชนของวงการเศรษฐศาสตร์; ฉบับบัญญัติคือ "A Puzzle for Pirates" ของ Ian Stewart ใน Scientific American, พฤษภาคม 1999 ซึ่งให้เครดิต Stephen Omohundro

ทำ — แก่เกมช่วงปลายก่อน. ทอดสมอที่เกมย่อยสุดท้าย ตรงที่คำตอบบีบจ้อย แล้วม้วนกลับมาสู่ปัจจุบัน ติราคาทุกเสียงโหวตด้วยอนาคตทางเลือกของเจ้าของเสียง หมากรุกช่วงท้ายกระดาน การออกแบบสัญญา และการเจรจาทุกครั้งที่มีทางเดินหนี ล้วนวิ่งด้วยเครื่องยนต์ตัวนี้

★★★★ 9 · นักโทษ 100 คนกับหลอดไฟ

นักโทษหนึ่งร้อยคน ห้องสอบสวนหนึ่งห้องมีหลอดไฟดวงเดียว เริ่มต้นปิดอยู่ แต่ละวัน พัดศิพานักโทษหนึ่งคน สุ่มอย่างสม่ำเสมอ เข้าห้อง; นักโทษจะสับสวิตช์หลอดไฟหรือปล่อยไว้เฉยๆ ก็ได้ ณ ขณะใดก็ตาม นักโทษคนใดก็ได้อาจประกาศ: "พวกเราทั้งหนึ่งร้อยคนได้เข้าห้องนี้แล้ว" ถ้าคำประกาศถูก ทุกคนเป็นอิสระ; ถ้าผิด ทุกคนตาย นักโทษปรึกษาหารือกันได้หนึ่งครั้ง ก่อนการเยือนครั้งแรก จงหากลยุทธ์ที่ไม่มีทางผิด

ออกแบบโปรโตคอลของตัวเองก่อนอ่านของพวกเขา

เฉลย. หน่วยความจำร่วมของห้องคือหนึ่งบิต ไม่มีใครนับเลขในนั้นได้ — แต่คนหนึ่งร้อยคนคุยผ่านมันได้ ถ้าตกลงกันล่วงหน้าว่าใครพูดอะไร และเมื่อไร แต่งตั้งนักโทษหนึ่งคนเป็นผู้นับ (Counter) ที่เหลือทุกคนทำตามกฎข้อเดียว: ครั้งแรกที่คุณเข้าไปแล้วพบหลอดไฟปิดอยู่ จงเปิดมัน — ครั้งเดียวในชีวิต; ในทุกสถานการณ์อื่น อย่าแตะอะไรทั้งนั้น กฎของผู้นับ: เมื่อใดที่เขาพบหลอดเปิดอยู่ เขาปิดมันและบวกหนึ่งเข้าบัญชีส่วนตัว เมื่อบัญชีถึง 99 เขาประกาศ

ความถูกต้องนั้นสมบูรณ์ ไม่ใช่แค่ น่าจะถูก ทุกวงจรเปิด-แล้ว-ปิดที่ผู้นับบันทึก สมัยกับสัญญาณครั้งแรก-และ-ครั้งเดียวของผู้ที่ไม่ใช่ผู้นับหนึ่งคนที่แตกต่างกันพอดีเป๊ะ: ไม่มีใครส่งสัญญาณสองครั้ง และไม่มีสัญญาณใดสูญหายได้ เพราะมีเพียงผู้นับเท่านั้นที่เคยปิดหลอด บัญชี 99 จึงแปลว่าคนอื่นที่แตกต่างกัน 99 คนได้มาเยือนแล้ว — และตัวผู้นับเองทำให้ครบ 100 หลอดไฟคือช่องสัญญาณขนาดหนึ่งบิต; โปรโตคอลนี้เรียงส่งสาร 99 ฉบับผ่านมัน ทีละฉบับ

ราคาที่ต้องจ่ายคือความอดทน ซิมูเลชันประเมินเวลารอคาดหมายไว้ราว 10,300 วัน — ยี่สิบแปดปี — ส่วนใหญ่หมดไปกับหลอดที่ติดค้างเปล่าประโยชน์ รอการเยือนสุ่มครั้งถัดไปของผู้นับ โปรโตคอลที่เร็วกว่ามีอยู่จริง: แผนหลายชั้นที่นักโทษถือ "โทเคน" มูลค่าได้ระดับ ลดเวลาคาดหมายลงได้มาก (ตระกูลนี้ถูกวิเคราะห์โดย Dehaye, Ford & Segerman, Mathematical Intelligencer, 2003) แต่แผนผู้นับเดียวคือบทพิสูจน์บัญญัติของความเป็นไปได้ และอาร์กิวเมนต์ความถูกต้องของมันจุลงในสี่ประโยค — ความเหมาะสมที่สุดในแบบของมันเอง ปริศนานี้ยังหนุ่มมากสำหรับความคลาสสิก: ถูกโพสต์ครั้งแรกในนิวส์กรุป rec.puzzles เมื่อ 24 กรกฎาคม 2002

ทำ — ออกแบบโพรโทคอลหนึ่งบิต. เมื่อสถานะร่วมจั่วเหลือเกิน จงเลิกถามว่า "ฉันนินยอะไรได้บ้าง?" แล้วถามว่า "เราตกลงโพรโทคอลอะไรกันไว้ล่วงหน้าได้บ้าง?" แต่งตั้งผู้รบยอดหนึ่งคน; ทำให้ทุกสัญญาณยงได้นัดเดียวและปราศจากความกำกวม นี่คือนิยามของระบบกระจาย (distributed systems) ที่ถูกเล่าเป็นนิทาน

★★★★ 37 · นักโทษ 100 คนกับกล่อง 100 ใบ

นักโทษหนึ่งร้อยคนเดิม ในห้องที่โหดร้ายกว่า กล่องหนึ่งร้อยใบเรียงเป็นแถว; ข้างในคือหมายเลข 1 ถึง 100 ในการเรียงสับเปลี่ยนสุ่มอย่างสม่ำเสมอ ใบละหนึ่งหมายเลข นักโทษแต่ละคน ตามลํ้าพัง เปิดกล่องได้ห้าสิบใบเพื่อค้นหาหมายเลขของตัวเอง จากนั้นห้องถูกจัดคืนสภาพเหมือนเดิมเป๊ะ และเขาออกไปอีกประตูหนึ่ง ส่งสัญญาณอะไรไม่ได้ทั้งสิ้น ถ้านักโทษทุกคนพบหมายเลขของตัวเอง ทุกคนเป็นอิสระ; พลาดเพียงคนเดียวตายทั้งหมด หากเปิดกล่องแบบสุ่ม นักโทษแต่ละคนสำเร็จด้วยความน่าจะเป็น $1/2$ กลุ่มจึงรอดด้วยความน่าจะเป็น $(1/2)^{100} \approx 8 \times 10^{-31}$ — เรียกมันว่าไม่มีวัน มีกลยุทธ์ที่ความน่าจะเป็นในการรอดเกิน 31 เพอร์เซ็นต์อยู่จริง จงหามัน

อ่านอีกครั้ง: จาก 10^{-30} สู่เกือบหนึ่งในสาม ที่นี้ ออกลํ้า

เฉลย. การสื่อสารเป็นไปไม่ได้ ดังนั้นการประสานงานต้องถูกลักลอบผ่านโครงสร้างร่วมเพียงหนึ่งเดียวที่มีอยู่: เนื้อในของกล่องนั่นเอง **กลยุทธ์วัฏจักร:** นักโทษหมายเลข k เปิดกล่อง k ก่อน ข้างในมีเลข j สักตัว; เขาเปิดกล่อง j ต่อ; อ่านเจอ m ก็เปิดกล่อง m — ไล่ตามตัวชี้ไปเรื่อยๆ นั่นคือกลยุทธ์ทั้งหมด

ทำไมมันได้ผล: ความสัมพันธ์กล่อง-สู่-เนื้อในคือการเรียงสับเปลี่ยน และทุกการเรียงสับเปลี่ยนแยกสลายตัวออกเป็นวัฏจักร การเริ่มที่กล่อง k แล้วไล่ตามตัวชี้คือการเดินไปตามวัฏจักรที่บรรจุ k อยู่พอดี และการเดินนั้นการันตีว่าจะไปถึงกล่องที่ถือหมายเลข k — ตัวชี้ที่ปิดห่วงโซ่ ดังนั้นนักโทษ k สำเร็จก็ต่อเมื่อวัฏจักรของเขายาวไม่เกินห้าสิบเท่านั้น ชะตาของเขาเล็กเป็นการพนันอิสระห้าสิบตา และกลายเป็นคำถามข้อเดียวว่าด้วยรูปทรงของการเรียงสับเปลี่ยน

เมื่อได้ออย่างนั้น ชะตาของทั้งกลุ่มก็ยุบรวมลงบนเหตุการณ์ระดับสากลเหตุการณ์เดียว: **ทั้งหนึ่งร้อยสำเร็จ ก็ต่อเมื่อการเรียงสับเปลี่ยนไม่มีวัฏจักรยาวเกิน 50** วัฏจักรยาวมีโอกาสแค่ไหน? สำหรับความยาว $k > 50$ ใดๆ วัฏจักรเช่นนั้นมีได้อย่างมากหนึ่งวง (สองวงต้องใช้สมาชิกเกิน 100 ตัว) และความน่าจะเป็นที่การเรียงสับเปลี่ยนสุ่มของ 100 จะบรรจุวัฏจักรความยาว k คือ $1/k$ พอดี ดังนั้นความน่าจะเป็นของความล้มเหลวคือ $1/51 + 1/52 + \dots + 1/100 = H_{100} - H_{50} \approx \ln 2 \approx 0.693$ และการรอดชีวิตคือ $1 - (H_{100} - H_{50}) = \mathbf{0.31183}$ คำนวณได้แม่นยำเป๊ะ ตัวเลขนี้แทบไม่เสื่อมถอยเมื่อคุกโดขึ้น: ลิมิตคือ $1 - \ln 2 \approx 30.7$ เปอร์เซ็นต์ ไม่ว่านักโทษจะมีหนึ่งร้อยคนหรือหนึ่งพันล้านคน

ทีนี้ถึงส่วนที่ควรนั่งนิ่งๆ อยู่กับมัน ลองถามนักโทษคนใดคนหนึ่งว่ากลยุทธ์นี้ทำอะไรให้เขาบ้าง: วัฏจักรที่ผ่านกล่องของเขามีโอกาสเท่ากันที่จะยาวเท่าใดก็ได้ตั้งแต่ 1 ถึง 100 ดังนั้นความน่าจะเป็นสำเร็จส่วนตัวของเขาคือ $50/100$ — เท่ากับ $1/2$ พอดี ไม่ต่างจากการเดาสุ่มเลขสักนิต แต่มตอของปัจเจกไม่กระตือรือร้นแม้แต่คนเดียว สิ่งที่เปลี่ยนคือสหสัมพันธ์ นักเดาสุ่มล้มเหลวเป็นอิสระจากกัน ใครสักคนจึงล้มเหลวแทบแน่นอน; นักไล่วัฏจักรล้มเหลวพร้อมกันหรือไม่ล้มเลย เพราะสมาชิกทุกคนของวัฏจักรที่ยาวเกินล้มพร้อมกันทั้งยวง และเมื่อไม่มีวัฏจักรยาว ก็ไม่มีใครล้มเลย กลยุทธ์นี้ต้อนชะตาหนึ่งร้อยชีวิตขึ้นไปกองอยู่บนการโยนเหรียญครั้งเดียว ว่าด้วยรูปทรงของการเรียงสับเปลี่ยนชุดเดียว และมันแทบไร้ผู้ทำชิง: Curtin กับ Warshauer (2006) ต่อยอดการวิเคราะห์ดั้งเดิมของ Miltersen กับ Gál แสดงว่าไม่มีกลยุทธ์ใดทำได้ดีกว่านี้อย่างมีนัยสำคัญ

ปัญหานี้ถือกำเนิดในวิทยาการคอมพิวเตอร์เชิงทฤษฎี — Peter Bro Miltersen ตั้งมันขึ้น (ร่วมกับ Anna Gál) ที่ ICALP 2003 ในฐานะกลไกขึ้นหนึ่งของบทพิสูจน์ขอบเขตล่างของโครงสร้างข้อมูล และเพื่อนร่วมงานของเขา Sven Skyum คือผู้ค้นพบกลยุทธ์วัฏจักร มันถูกขนานนามอย่างมีน้ำหนักร่าเริงว่า เป็นผลลัพธ์ที่ฝืนสัญชาตญาณที่สุดในคณิตศาสตร์บันเทิง

ทำ — ผูกชะตาให้สัมพันธ์กัน. เมื่อความสำเร็จอิสระควบกันเป็นหายนะ จงออกแบบใหม่ให้ทุกคนสำเร็จหรือล้มเหลวบนเหตุการณ์เดียวกัน มีท่าที่สองติดสอยมาด้วย: ยัดเยียดโครงสร้างให้ความสุ่ม — การแยกสลายเป็นวัฏจักรของการเรียงสับเปลี่ยนนอนรออยู่ตรงนั้นมาตลอด รอเพียงใครสักคนอ่านกล่องเป็นตัวชี้

★★★★★ 10 · ชาวเกาะตาสีฟ้า

เกาะแห่งหนึ่งมีนักตรรกะสมบูรณ์แบบสองร้อยคน: ตาสีฟ้าหนึ่งร้อย ตาสีน้ำตาลหนึ่งร้อย ไม่มีกระจก ไม่มีฝืนน้ำที่สะท้อนเงา และสีตาไม่เคยถูกพูดถึง — ข้อห้ามที่มีเขียวเล็บจริง ทุกคนเห็นดวงตาของทุกคนอื่น; ไม่มีใครรู้สีตาของตนเอง กฎหมายมีว่า: ณ เที่ยงคืนหลังจากที่คุณรู้ว่าตาของตัวเองสีฟ้า คุณต้องออกจากเกาะไปตลอดกาล ทั้งหมดนี้ — ตัวกฎหมาย ความเป็นนักตรรกะสมบูรณ์แบบของทุกคน — เป็นความรู้ร่วม (common knowledge) วันหนึ่งผู้มาเยือนกล่าวต่อทั้งเกาะพร้อมกัน: "ข้าพเจ้าเห็นคนตาสีฟ้าอย่างน้อยหนึ่งคน" ชาวเกาะทุกคนเห็นคนตาสีฟ้าอย่างน้อยเก้าสิบเก้าคนอยู่แล้ว; ผู้มาเยือนดูจะไม่ได้พูดอะไรใหม่เลย จะเกิดอะไรขึ้น?

ผู้มาเยือนเพิ่มอะไรเข้ามามากันแน่? นั่งอยู่กับคำถามนั้นก่อน

เฉลย. ชาวเกาะตาสีฟ้าทั้งหนึ่งร้อยคนออกจากเกาะพร้อมกัน ณ เที่ยงคืนของวันที่หนึ่งร้อย

ไต่ขึ้นจากพื้น ชาวเกาะตาสีฟ้าหนึ่งคน: เธอมองไปทางไหนก็ไม่เห็นตาสีฟ้า คำประกาศจึงหมายถึงเธอได้คนเดียว เธอออกไปในเที่ยงคืนแรก สองคน: แต่ละคนเห็นคนตาสีฟ้าหนึ่งคนพอดี และให้เหตุผลว่า "ถ้าตาฉันสีน้ำตาล เขาก็อยู่ลำพัง — เขาจะคิดออกแล้วออกไปคืนนี้" ไม่มีใครออก เพราะต่างคนต่างรอกันและกัน ความเจียบนั้นดังกึกก้อง: บัดนี้แต่ละคนรู้แล้วว่ามิถุนตาสีฟ้าคู่ที่สอง และรู้ว่าเป็นของใคร ทั้งคู่ออกไปในเที่ยงคืนที่สอง สามคน: ชาวเกาะตาสีฟ้าแต่ละคนเห็นสองคน และให้เหตุผลว่า "ถ้าฉันสีน้ำตาล สองคนนั้นจะคลี่คลายกันเองภายในคืนที่สอง" เที่ยงคืนที่สองผ่านไป เกาะยังอยู่กันครบ ทั้งสามจึงรู้; พวกเขาออกไปคืนที่สาม การอุปนัยเวียนวนราบ: ชาวเกาะตาสีฟ้า n คนออกจากเกาะ ณ เที่ยงคืนที่ n เมื่อมีหนึ่งร้อยคน — เก้าสิบเก้าเที่ยงคืนแห่งความเจียบ แล้วจึงการอพยพครั้งใหญ่ในคืนที่หนึ่งร้อย

แต่ผู้มาเยือนเพิ่มอะไรกันแน่? ทุกคนเห็นตาสีฟ้าอยู่แล้ว นี่คือการตอบที่ซื่อสัตย์ และมันคือปริศนาทั้งข้อ: ก่อนคำประกาศ "มีคนตาสีฟ้า" เป็นสิ่งที่ทุกคนรู้ — แต่มันไม่ใช่**ความรู้ร่วม (common knowledge)** ไล่ตามการซ้อนชั้นดู ชาวเกาะตาสีฟ้าคนหนึ่งเห็นคนอื่น 99 คน เขารู้ว่าแต่ละคนในนั้นเห็นอย่างน้อย 98 เขารู้ว่าพวกเขาเห็นว่าคนอื่น ๆ เห็นอย่างน้อย 97... "ทุกคนรู้ว่าทุกคนรู้" แต่ละชั้นเผาลานส่วนเพื่อไปหนึ่งชาวเกาะ และที่ความลึก 99 โชกัหยั่งกันลงในชาวเกาะสมมุติคนหนึ่งซึ่ง — ภายในจินตนาการซ้อนชั้นทั้งหมด

นั่น — อาจไม่เห็นดวงตาสีฟ้าเลยสักคู่ ข้อความที่ลึก 99 ชั้นนั้นเท็จ คำประกาศของผู้มาเยือน — ทุกคนได้ยิน ทุกคนเห็นว่าทุกคนได้ยิน — ทำให้ "มีคนตาสีฟ้า" เป็นจริงที่ทุกความลึกพร้อมกันในคราวเดียว นั่นคือสิ่งใหม่: ไม่ใช่ข้อเท็จจริงเกี่ยวกับดวงตา แต่เป็นข้อเท็จจริงเกี่ยวกับความรู้ว่าด้วยความรู้

นับจากนั้น เทียงคินอันเจียบงันแต่ละคินก็เป็นประกาศสาธารณะในตัวมันเอง — "ยังไม่มีใครรู้" — และการอุปนัยได้ขึ้นคินละชั้นบันได จนแตะถึงความจริง ถ้อยแถลงสาธารณะเปลี่ยนโลกได้ ทั้งที่เพิ่มสารสนเทศชั้นที่หนึ่งเป็นศูนย์ ปริศนานี้สืบเชื้อสายจากปัญหาใบหน้าเปื้อนของ Littlewood (A Mathematician's Miscellany, 1953) และภรรยานอกใจสี่สิบคนของ Gamow กับ Stern (Puzzle-Math, 1958); อาภรณ์บัปตาสีฟ้าของ มันแพร์ไปโนทสวอร์ธ 2000 โดยเฉพาะผ่าน xkcd และบทความบล็อกปี 2008 ของ Terence Tao

ทำ — อุปนัยบนความรู้ร่วม. "ทุกคนรู้ X" กับ "ทุกคนรู้ว่าทุกคนรู้ X..." คือสถานะของโลกที่ต่างกันคนละใบ และโพรโทคอล ตลาดกับการเผชิญหน้ากันล้วนวิ่งอยู่บนความต่างนั้น เมื่อเหตุการณ์สาธารณะเปลี่ยนพฤติกรรมโดยไม่เปลี่ยนข้อเท็จจริงส่วนตัวของใครเลย จงมองหาความลึกของความรู้ที่มันเพิ่มเติมจนครบ

★★★★★ 49 · ปริศนาเป็นไปไม่ได้ของ Freudenthal

จำนวนเต็มสองจำนวน x กับ y ถูกเลือกขึ้น โดย $1 < x < y$ และ $x + y \leq 100$ คุณ P ได้รู้เพียงผลคูณ; คุณ S ได้รู้เพียงผลบวก บทสนทนาต่อไปนี้เกิดขึ้น ทุกถ้อยคำเป็นจริงและทั้งคู่ได้ยิน:

P: "ผมไม่รู้ตัวเลขคืออะไร" S: "ผมรู้อยู่แล้วว่าคุณไม่รู้" P: "ตอนนี้ผมรู้แล้ว" S: "ตอนนี้ผมก็รู้แล้วเหมือนกัน"

จงหา x กับ y — จากบทสนทนาเพียงลำพัง

มันเคยถูกเรียกว่าปัญหาที่เป็นไปไม่ได้ มันไม่ใช่หรอก — เกือบไปเท่านั้น

เฉลย. ไม่มีสักคำที่เอ่ยถึงตัวเลข ทว่าแต่ละบรรทัดคือข้อเท็จจริงเชิงไปกัวสารสนเทศของผู้พูดอนุญาตให้ทำอะไรได้ — และข้อเท็จจริงแต่ละข้อกรองคู่ผู้สมัครลงไปเรื่อยๆ

บรรทัด 1 — P ไม่รู้ ผลคูณของเขาต้องแยกตัวประกอบได้อย่างกำกวมภายใต้เงื่อนไข หากมันเป็น สมมุติ $35 = 5 \times 7$ จำนวนเฉพาะสองตัว เขาย่อมรู้ทันที ผลคูณทุกตัวที่แยกได้แบบเดียวตายที่บรรทัดนี้

บรรทัด 2 — S รู้อยู่แล้วว่า P ไม่รู้ไม่ใช่เดา: รู้ จากผลบวกเพียงลำพัง ดังนั้นการแตกผลบวกของ S ทุกแบบที่ยอมรับได้ ต้องให้ผลคูณที่กำกวมทั้งหมด ข้อนี้โหดเหี้ยม ผลบวกใดที่แตกเป็นจำนวนเฉพาะสองตัวได้ ตรรกะ — ผลคูณของการแตกแบบนั้นจะบอก P จนหมดเปลือก — และที่ขนาดนี้ ผลบวกคู่ทุกตัวแตกเช่นนั้นได้ (ตรงตรงๆ ได้เลย; ไม่ต้องพึ่งข้อความคาดการณ์ใด) ร่อนผู้รอดที่เป็นจำนวนคี่แล้วเหลือผลบวกสิบตัวพอดี: **{11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 53}**

บรรทัด 3 — ตอนนี้ P รู้แล้ว การได้ยินบรรทัด 2 บอก P ว่าผลบวกอยู่ในบัญชีสิบตัวนั้น; ผลคูณของเขาต้องเข้ากันได้กับสมาชิกเพียงหนึ่งเดียวเท่านั้น คู่มันทำงานกับคำตอบสุดท้าย: ผลคูณ $52 = 4 \times 13$ ผลบวก 17 — อยู่ในบัญชี; หรือ 2×26 ผลบวก 28 — เป็นคู่ ตกไป เหลือผู้รอดหนึ่งเดียว P จึงประกาศว่ารู้

บรรทัด 4 — ตอนนี้ S ก็รู้ด้วย ในบรรดาการแตกทั้งหมดของผลบวกของเขา ต้องมีเพียงแบบเดียวที่เพ่งกลายเป็นแบบที่ P แก้ได้ ณ บรรทัด 3 ลองรันผลบวกของเขา 17: การแตก (2,15) มีผลคูณ $30 = 2 \times 15$ (ผลบวก 17 อยู่ในบัญชี) แต่ก็เท่ากับ 5×6 (ผลบวก 11 ซึ่งก็อยู่ในบัญชี) — P แบบนั้นจะยังติดแหงก ดังนั้น (2,15) ถูกคัดทิ้ง (3,14): ผลคูณ 42 กำกวมระหว่างผลบวก 17 กับ 23 ตก (5,12): 60 ฉีกใจระหว่าง 17 กับ 23 (7,10): 70 ฉีกระหว่าง 17 กับ 37 (8,9): 72 ฉีกระหว่าง 17 กับ 27 (6,11): 66 ฉีกระหว่าง 17 กับ 35 เหลือรอดเพียง **(4,13)** — ดังนั้น S ผู้ถือ 17 จึงรู้แล้ว และการทวนสอบด้วยเครื่องปิดวงจรให้สนิท: สำหรับผลบวกตัวอื่นทุกตัวในบัญชี มีการแตกที่รอดบรรทัด 3 อยู่สองแบบขึ้นไป บรรทัด 4 จึงยอมเป็นเท็จ ผลบวกคือ 17 ผลคูณคือ 52: **$x = 4, y = 13$**

บทสนทนาที่ดูไร้เนื้อหากลับกำหนดตัวเลขสองตัวได้อย่างหนึ่งเดียว วันเกิดของ Cheryl ในบทที่ 5 คือทายาทปิปปไวรัลของปริศนาข้อนี้ รันด้วยเครื่องยนต์เดียวกันที่แรงดันต่ำกว่า Hans Freudenthal ตีพิมพ์ต้นฉบับใน Nieuw Archief voor Wiskunde, 1969; Gardner นำมาเล่าเป็นภาษาอังกฤษในทศวรรษถัดมาในชื่อ "the impossible problem" — เป็นไปไม่ได้แค่โดยรูปลักษณ์ เพราะความไม่รู้ที่ถูกประกาศออกมา ดูราวกับการไร้ซึ่งสารสนเทศ

ทำ — ขุดเหมืองจากอภิปรัชญา. "ผมไม่รู้" กับ "ผมรู้อยู่แล้วว่าคุณไม่รู้" คือข้อเท็จจริงทางคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเซตสารสนเทศ — ตัวกรองที่คมกริบเท่าสมการเมื่อนักเจรจา ตลาด หรือเครื่องจักรประกาศสิ่งที่มันยังสรุปไม่ได้ คำประกาศนั้นคือข้อมูล ไม่มีอะไรถูกพูดเกี่ยวกับตัวเลขเลย และนั่นแหละคือข้อมูล

★★★★ 50 · การแขวนคอที่ไม่คาดฝัน

ผู้พิพากษามีคำสั่งในวันอาทิตย์: "เจ้าจะถูกแขวนคอตอนเที่ยงของวันธรรมดวันหนึ่งในสัปดาห์ที่จะถึงนี้ — และการแขวนคอจะเป็นเรื่องไม่คาดฝัน เจ้าจะไม่รู้วันล่วงหน้า" นักโทษให้เหตุผล: "พวกเขาแขวนฉันวันศุกร์ไม่ได้: พอถึงคืนวันพฤหัสบดี เมื่อสี่วันผ่านพ้นไป ฉันย่อมรู้ว่ามีนกำลังจะมา วันศุกร์ตกไป แต่เมื่อวันศุกร์ถูกขีดฆ่า วันพฤหัสบดีก็กลายเป็นวันสุดท้ายที่เป็นไปได้ ดังนั้นพอถึงคืนวันพุธฉันย่อมรู้ — วันพฤหัสบดีก็ตกไปด้วย" วันแล้ววันเล่า ทั้งสัปดาห์พังครืนลง และนักโทษก็สรุปอย่างโล่งอกว่าโทษนี้ไม่มีทางถูกลงมือได้เลย วันพุธตอนเที่ยง เพฆฆาตมาถึง นักโทษประหลาดใจอย่างสิ้นเชิง คำสั่งนั้น ในบั้นปลายเป็นจริง ข้อบกพร่องในการให้เหตุผลของเขาอยู่ตรงไหน?

ปรัชญาเกือบแปดสิบปียังปิดคดีข้อนี้ไม่ลง

เฉลย. ไม่มี — อย่างน้อยก็ไม่มีข้อยุติ — และหนังสือเล่มนี้จะไม่แสร้งว่ามี สิ่งที่ตกลงกันได้มีเท่านี้: อาร์กิวเมนต์คัดค้านทั้งของนักโทษ กับการที่คำสั่งเป็นจริงขึ้นมาในท้ายที่สุด จะถูกต้องพร้อมกันทั้งคู่ไม่ได้ และรอยตำหนิต้องนั่งอยู่ที่ไหนสักแห่งในการให้เหตุผลว่าด้วยการรู้ แต่ตรงไหนกันแน่ ยังคงเป็นสมรภูมิช่วงชิงกันในบทความวิชาการกว่าห้าสิบชิ้น

การวินิจฉัยมีสามตระกูล ไม่มีตระกูลใดเป็นฉันทามติ Quine (1953) โจมตีฐานของการอุปนัย: การคัดวันศุกร์ทั้งต้องการให้คำสั่งไม่เพียงเป็นจริง แต่ต้องฟังฟังได้อย่างรู้ได้ ณ ทุกจุดเวลาในอนาคต — และ "คำสั่งจะเป็นจริง" กับ "ฉันเอาคำสั่งมาใช้ฟังในการให้เหตุผลของตัวเองได้" เป็นคนละค่ากล่าวอ้าง ที่ถูกเหมารวมเข้าด้วยกันอย่างเงิบเงิบ สำนักตรรกศาสตร์เชิงญาณ (epistemic logic) จัดรูป "ความไม่คาดฝัน" ด้วยตัวดำเนินการความรู้ และพบว่าคำประกาศนั้นไม่เสถียรเชิงอ้างถึงตัวเอง: ข้อความที่เป็นจริงได้แต่ไม่อาจรู้ได้ว่าจริง จนการที่นักโทษหยิบมันไปใช้เองคือสิ่งที่ทำลายมัน — Sorensen

(1988) เรียกกรณีวันสุดท้ายว่า "blindspot" ส่วนสำนักกลดทอนยักษ์ใหญ่: สำหรับสัปดาห์ที่มีวันเดียว คำสั่งขัดแย้งกันโด้งๆ สำหรับหัววัน มัน "ยืนยันได้โดยประมาณ" และสัญญาญาณก็เลงความต่างนั้นจนกลายเป็นรัศมีเรืองรองของพาราไดออกซ์

ว่ากันว่าปัญหานี้เริ่มชีวิตในฐานะประกาศป้องกันภัยฝ่ายพลเรือนยามสงครามของสวีเดน — การซ่อมที่จะจัดขึ้นสัปดาห์หน้า ในวันที่ไม่มีใครทำนายได้ — และถูกขบคิดต่อกันมาจน D. J. O'Connor นำมันลงวารสาร Mind ในปี 1948 คอลัมน์ปี 1963 ของ Gardner ทำให้มันโด่งดัง; Blindspots (1988) ของ Sorensen มอบหนังสือทั้งเล่มให้มัน บัญชีคดีนี้ยังเปิดอยู่

ทำไมจึงปิดห้องบอสด้วยบอสที่ยังไม่มีใครโค่น? เพราะแนวเรื่องควรซื้อสัตย์กับขอบเขตของตัวเอง และเพราะบทเรียนอยู่รอดได้แม้เฉลยจะขาดหาย ปริศนาข้ออื่นทุกข้อในห้องนี้วิ่งอยู่บนความรู้ที่ประพุดติดตามกฎ — ถูกนับผ่านหลอดไฟ ถูกซ่อนชั้นบนเกาะ ถูกขุดออกจากบทสนทนา ตรงนี้คือประตูที่แปะป้ายว่า ความรู้เกี่ยวกับความรู้ในอนาคตของตนเอง และเบื้องหลังบานประตูนั้น พ้นหายไป การตอบสนองที่ซื้อสัตย์ต่อปัญหาเปิดคือประโยคที่หนังสือเล่มนี้พยายามมาตลอดทั้งเล่ม เพื่อให้ได้สิทธิ์พูดมันออกมาตรงๆ: ยังไม่มีใครรู้

ทำ — ความรู้ทำลายตัวเองได้. ถ้อยแถลงว่าด้วยสิ่งที่คุณจะรู้ ไม่ใช่ข้อเท็จจริงธรรมดา; การป้อนมันกลับเข้าการอนุมานของตัวเองอาจทำให้มันเป็นโมฆะ จงเคารพความต่างเชิงชนิดระหว่างสิ่งที่ เป็นจริง กับสิ่งที่รู้ได้ว่าจริง — คำประกาศทำนอง "คุณจะถูกตรวจสอบ โดยไม่แจ้งล่วงหน้า" มีน้ำหนักจริงในทางกฎหมายและความมั่นคง และปริศนาข้อนี้คือหลักฐานยืนยันว่า สิ่งเหล่านั้นอาจถูกก่อกำขึ้นบนอากาศ

ทำที่ตอนนี้เป็นของคุณแล้ว

- ริดสารสนเทศสูงสุดต่อการทดสอบ (★★★★ 8, ลูกบอลสิบสองลูก) — ทำงบทผลลัพธ์ก่อน ($3^3 \geq 24$) แล้วให้ทุกการทดสอบผ่านผู้รอดออกอย่างเท่าเทียม
- แก่เกมช่วงปลายก่อน (★★★★ 44, โจรสลัด) — ทอดสมอตรงที่เกมจ๊ิบจ๊อย; ม้วนย้อนกลับ ติราคาแต่ละเสียงด้วยอนาคตทางเลือกของมัน

- **ออกแบบโปรโตคอลหนึ่งบิต (★★★★ 9, หลอดไฟ)** — สถานะร่วมอันจีวเรียกหาโปรโตคอลที่ตกลงกันล่วงหน้า ไม่ใช้การนิรนัย; แต่งตั้งผู้รวบยอด
- **ผูกชะตาให้สัมพันธ์กัน (★★★★ 37, กล้อง)** — เมื่อความสำเร็จแบบอิสระสั้นหวัง จงแขวนความสำเร็จของทุกคนไว้บนเหตุการณ์ร่วมเดียว
- **อุปนัยบนความรู้ร่วม (★★★★ 10, ชาวเกาะ)** — "ทุกคนรู้" กับ "ทุกคนรู้ว่าทุกคนรู้" คือคนละโลก
- **ชุดเหมือนจากอภิปรัชญา (★★★★ 49, Freudenthal)** — ความไม่รู้ที่ถูกประกาศคือข้อมูล; กรอบบนเซตสารสนเทศ
- **ความรู้ทำลายตัวเองได้ (★★★★ 50, การแขวนคอ)** — ความจริงว่าด้วยความรู้ในอนาคตอาจไม่รอดจากการถูกนำไปใช้

ทั้งเจ็ดนี้คือสันเขายอดสุดของภาค II เหนือไปกว่าทำเดี๋ยวกๆ ของแต่ละข้อ พวกมันฝึกอุปนิสัยอย่างหนึ่ง: ความอดทนต่อโซ่เหตุผลยาวที่ห้ามรั่วสักร้อย ความเคารพต่อคำตอบที่พยายามสัญญาตามแต่ก็จริงอยู่ดี และ — เพียงครั้งเดียว ในตอนท้าย — ความสงบนิ่งพอที่จะตั้งคำถามไว้ให้เปิดอยู่ เพราะมันยังเปิดอยู่จริงๆ ภาค III จะพาไปเยือนผู้คนที่ไม่ได้เกรดระดับนี้เป็นกีฬา แล้วแกะการฝึกของพวกเขาออกมาเป็นชิ้นๆ

ภาค III

สมองโอลิมปิก



บทที่ 8

แชมป์คิดอย่างไร

คณิตศาสตร์สายแข่งขันดูเผินๆ เหมือนสนามวัดความหลักแหลมดิบๆ แต่เนื้อแท้แล้วมันวัดการจำท่าที่ผ่านการฝึกฝนเป็นหลัก สิ่งที่ยากเจ้าของเหรียญ IMO ออกจากนักเรียนเก่งประจำห้องไม่ใช่ความเร็วของหน่วยประมวลผล แต่คือห้องสมุดของคุณ "สัญญาณจำ-ท่าตอบ" รวสองร้อยคู่ — "ข้อนี้กลืนเหมือนภาวะคู่คี่ (parity)" "เงื่อนไขชุดนี้ตะโกนว่า 'ไบนารีเสิร์ช' — ที่ถูกกลืนขึ้นจากโจทย์นับพันข้อ ทั้งข้อที่แก้ได้ และที่สำคัญยิ่งกว่า ข้อที่แก้พลาด ไม่มีใครเกิดมารู้ว่า "จงทำค่ามากที่สุดให้น้อยสุด" คือประโยคที่กำลังพูดเรื่องไบนารีเสิร์ช ต้องมีใครสักคนเคยฝึกมัน พลัดมัน จดความพลัดลงสมุด แล้วได้เจอมันอีกครั้ง

จิตวิทยาเบื้องหลังเรื่องนี้ทั้งเก่าแก่และหนักแน่น งานศึกษาหมากกรุกของ Adriaan de Groot ในทศวรรษ 1940 ซึ่ง Chase กับ Simon ต่อยอดใน "Perception in Chess" (1973) แสดงให้เห็นว่าในตำแหน่งส่วนใหญ่ แกรนด์มาสเตอร์ไม่ได้คิดลึกกว่าผู้เล่นระดับสโมสรเลย พวกเขามองเห็นดีกว่าต่างหาก ในการทดลองคลาสสิก ตำแหน่งหมากจริงที่ฉายให้ดูเพียงไม่กี่วินาที มาสเตอร์เรียงกลับคืนได้เกือบสมบูรณ์แบบ ส่วนมือใหม่เรียงได้กะท่อนกะแท่น — แต่พอสับหมากให้กลายเป็นการวางแบบสุ่ม ความได้เปรียบของมาสเตอร์แทบระเหยหายไป หลายปีของการศึกษาได้ย่อยกระดานให้เป็นก้อนแบบแผนที่มีความหมาย และความเชี่ยวชาญก็แปลงการค้นหาให้กลายเป็นการเปิดดู Chase กับ Simon ประเมินคลังศัพท์ของมาสเตอร์ไว้ที่หลายหมื่นก้อน — ขนาดเดียวกับคลังคำศัพท์ในการอ่านหนังสือ ซึ่งเป็นการเปรียบเทียบที่ตรงจุด: ผู้เล่นระดับแข็งอ่านตำแหน่ง ไม่ใช่คำนวณมัน อิวิริสติกคือประสบการณ์ที่ถูกบีบอัด: มันเริ่มต้นไม่ความเป็นไปได้ขนาดเอ็กซ์โพเนนเชียลให้เหลือหมากตัวเลือกเพียงหยิบมือ

บทนี้ว่าด้วยจิตใจที่แบกห้องสมุดแบบนั้น: กรอบที่มันใช้คิด รอยราวในกรอบนั้นวัฒนธรรมที่ก่อร่างห้องสมุดขึ้นมา และฝีมือช่างของการอ่านผู้ออกโจทย์ราวกับเปิดแฟ้มสืบประวัติ บทนี้ปิดท้ายด้วยเหล่าเครื่องจักรที่เริ่มคว้าเหรียญเดียวกันได้ในปี 2024–25 และเหตุผลที่วัฒนธรรมการฝึกไม่ได้กลายเป็นฟิสิกส์กันไปเพราะเหตุนั้น สามบทถัดไป

คือตัวห้องสมุดเอง — เครื่องมือสืบหาค้น แต่ละชั้นมาพร้อมสัญญาณจำท่าและโจทย์คู่ที่
แก้ไขดู ส่วนบทนี้คือคู่มือปฏิบัติงานของบรรณารักษ์

สี่ชั้น

George Pólya (โพลยา) นักคณิตศาสตร์ชาวฮังการีแห่งสแตนฟอร์ด ตีพิมพ์ How to Solve It ในปี 1945 หนังสือขายได้กว่าล้านเล่ม และเป็นเอกสารก่อตั้งของแนวคิด "ฮิวริสติกในฐานะหลักสูตร" — ข้อถกเถียงต่อเนื่องจริงจังขึ้นแรกที่ยืนยันว่าการแก้ปัญหาคือเทคนิคที่สอนกันได้ ไม่ใช่พรสวรรค์ติดตัว ทุกสิ่งในภาค III แขนงอยู่บนกรอบของเขา จึงคุ้มค่าที่จะมองเห็นมันทั้งองค์ก่อนที่เครื่องมือจะมาถึง

ขั้นที่ 1 — เข้าใจปัญหา. คำถามของ Pólya: สิ่งที่ไม่รู้คืออะไร ข้อมูลมีอะไรบ้าง เงื่อนไขคืออะไร เงื่อนไขเพียงพอจะกำหนดสิ่งที่ไม่รู้หรือเปล่า วาดรูป ตั้งสัญกรณ์ที่เหมาะสมเมื่อฉบับแปลของสนามแข่ง: เขียนโจทย์ใหม่ในภาษารูปนัยของตัวเองก่อนจะลงมือแต่ละมัน คำตอบผิดส่วนใหญ่ตายตรงนี้ — พวกมันแก้โจทย์ข้อข้างเคียง และบ่อยครั้งแก้ได้อย่างสมบูรณ์แบบเสียด้วย ทีม ICPC ทำขั้นนี้เป็นพิธีกรรม: สมาชิกคนหนึ่งอ่านโจทย์ซ้ำเพื่อล่าประโยชน์ที่ทุกคนอ่านผ่านตา

ขั้นที่ 2 — วางแผน. เคยเห็นมันมาก่อนไหม รู้จักโจทย์ที่เกี่ยวข้องไหม เล่าโจทย์ใหม่อีกแบบได้หรือเปล่า แก้โจทย์ที่ง่ายกว่าหรือคล้ายกันก่อนได้ไหม ใช้ข้อมูลครบทุกชั้นแล้วหรือยัง ขั้นนี้แหละคือคลังแสงของบทที่ 9 ถึง 11 "การวางแผน" หมายถึงการกวาดสัญญาณจำท่าของคุณไปบนโจทย์ จนกว่าสัญญาณสักตัวจะลั่นไก

ขั้นที่ 3 — ลงมือตามแผน. ตรวจสอบทุกก้าว มองเห็นชัดหรือไม่ว่าก้าวนี้ถูกต้อง — พิสูจน์ได้ไหม คำแปล: วินัยการลงมือ การทำบัญชีแยกกรณี สุขอนามัยของพีชคณิต ความระแวดระวัง off-by-one และในสนามเขียนโปรแกรม พิธีกรรมทดสอบก่อนส่ง แผนนะราคาถูก แต่การลงมือแบบไร้ตำหนิได้เข้มน่าพิศมัยคือกล้ำเนื้ออีกมัดที่ต้องฝึกแยกต่างหาก และสนามแข่งพ่ายกันที่ขึ้นน้อยอย่างน้อยก็บ่อยพอกันกับขั้นก่อนหน้า ทีม ICPC ดิบักโค้ดที่พิมพ์ลงกระดาษขณะที่เพื่อนร่วมทีมพิมพ์คำตอบข้อถัดไป — วินัยการลงมือที่ถูกกางออกเป็นพื้นที่จริง

ขั้นที่ 4 — มองย้อนกลับ. ตรวจสอบผลลัพธ์ได้ไหม หาทางอื่นไปถึงมันได้ไหม เอาวิธีนี้ไปใช้ที่อื่นได้อีกไหม นี่คือขั้นที่มีอสมัครเล่นข้าม และแชมป์ทำงานเป็นอุตสาหกรรม วัฒนธรรม upsolving (แก้ซ้ำหลังรู้แก้) ที่เล่าอยู่ข้างล่างคือขั้นที่ 4 ที่ถูกแปลงเป็นวิถีชีวิต

สองหมายเหตุก่อนถึงคำเตือน หนึ่ง ขึ้นทั้งส่วนเป็นรูป ไม่ใช่เดินแถวหน้ากระดาน: แผนที่ล้มเหลวส่งคุณกลับไปทำความเข้าใจใหม่ และการมองย้อนกลับที่โจทย์ย่อยซึ่งแก้แล้วบ่อยครั้งก็คือแผนของโจทย์หลักนั่นเอง สอง ชั้นที่ 2 คือบ้านของสามบทถัดไป — ทำสังหารของบทที่ 9 เครื่องมือนักสร้างของบทที่ 10 และเลนส์ของบทที่ 11 ล้วนคือชั้นวางแผนที่ถูกแตกกระจายออกเป็นรีเฟล็กซ์มีชื่อสิบหกท่า

หน้าปิดที่หายไป

คำเตือนที่รักษาความซื่อสัตย์ของกรอบนี้มาจาก Mathematical Problem Solving (1985) ของ Alan Schoenfeld — เขาเฝ้าดูนักเรียนที่ถูกสอนอิทธิพลของ Pólya แล้วก็ยังไม่ยอมแพ้เลย ไม่ใช่เพราะขาดเครื่องมือ แต่เพราะขาดการควบคุม แผนภูมิใหม่ไลน์เชส

ชั้นนักเรียนของเขาโด่งดังในวงการ: อ่านโจทย์ หยิบโอเดียแรกที่เสนอหน้าเข้ามา แล้วไล่ตามมันเป็นเส้นแบนราบเส้นเดียวจนหมดเวลา แผนภูมิของผู้เชี่ยวชาญกลับแกว่งไปมา

— วิเคราะห์ วางแผน ลอง ตรวจสอบ ถอยออก วางแผนใหม่ นักเรียนมีเครื่องมือครบมือ แต่ขาดนาฬิกาจับเวลาในหัวที่คอยขัดจังหวะเป็นระยะด้วยคำถามว่า แนวทางนี้คุ้มค่าตัวของมันอยู่หรือเปล่า? วิธีแก้ในห้องเรียนของ Schoenfeld เรียบง่ายจนเกือบซ้ำ: เขาขัดจังหวะนักเรียนที่กำลังทำงาน ครั้งแล้วครั้งเล่า ด้วยคำถามสามข้อ — กำลังทำอะไรอยู่กันแน่? ทำไปทำไม? มันช่วยอะไรคุณ? — จนกระทั่งการขัดจังหวะติดตັงตัวเองลงในหัว และนักเรียนเริ่มถามเองโดยไม่ต้องมีใครจี้

จะเรียกการเฝ้าระวังอภิปัญญา (metacognitive monitoring) ว่าฮิวริสติกกรองหนตัวที่สิบเจ็ดก็ได้ เครื่องมือเลือกทำ ส่วนการควบคุมตัดสินใจว่าเมื่อไรควรทิ้งทำ พืชคณิตสองนาที่ที่ไม่มีอะไรง่ายลงเลย — ทบทวนใหม่ การแยกกรณีที่ออกลูกออกหลานเป็นจัดการณย่อย — ถอยออกมาแล้วล่าปริมาณไม่แปรเปลี่ยน (invariant) แทน การควบคุมยังเป็นทักษะที่นาฬิกาฝึกหนักที่สุดด้วย: ได้แรงกดดันของสนามแข่ง ต้นทุนจมจะกระชิบว่า อีกห้านาที่เดียว ในจังหวะเดียวกันเป๊ะกับที่หน้าปัดบอกว่าถึงเวลาเปลี่ยน ทุกอย่างในสามบทถัดไปตั้งอยู่บนข้อสมมุติว่าลูบนี้กำลังหมุนอยู่ เพราะห้องสมุดที่ไร้บรรณารักษ์ก็เป็นแค่กองหนังสือ

ห้องสมุดมาจากไหน

สาธารณชนจินตนาการถึงอัจฉริยะฟ้าประทาน แต่ตัววงการเดินเครื่องอุตสาหกรรมการฝึก พร้อมลูปฟีดแบ็กที่ซื่อสัตย์อย่างหาได้ยาก

สังเวียน. สังเวียนใหญ่แต่ละแห่งฝึกกล้ำเนื้อคนละมัด และนักแข่งที่เอาจริงฝึกข้ามสาย International Mathematical Olympiad จัดมาตั้งแต่ปี 1959 ปัจจุบันดังดุดกว่าร้อยละสองวัน วันละสามข้อ วันละสี่ชั่วโมงครึ่ง ข้อละเจ็ดคะแนน เต็ม 42 คร่าวๆ คือข้อ 1 กับ 4 เป็นขาเข้า ข้อ 2 กับ 5 ระดับกลาง ข้อ 3 กับ 6 โหดเหี้ยม International Olympiad in Informatics คือฝ่าแผดสายเขียนโปรแกรมระดับมัธยม — ให้คะแนนบางส่วนได้ สองวัน วันละห้าชั่วโมง ICPC แชมป์เป็นชิปประเภททีมระดับมหาวิทยาลัย จับนักศึกษาสามคนนั่งหน้าคอมพิวเตอร์เครื่องเดียวร่วมกันห้าชั่วโมง กับโจทย์สิบถึงสิบสามข้อ ความขาดแคลนที่จ้องใจออกแบบบังคับให้เกิดการแบ่งบทบาท — คนอ่าน คนเขียนโค้ด คนพิสูจน์ — และการดีกับบนกระดาน ซึ่งฝึกอะไรบางอย่างที่ละเอียดอ่อน: การแปลงความคิดครึ่งรูปครึ่งร่างออกมาเป็นถ้อยคำ Putnam จัดมาตั้งแต่ปี 1938 ให้โจทย์สิบสองข้อ 120 คะแนน กับคำถามฐานที่หลายปียู่แค่ 0 หรือ 1 — การสอบเทียบที่ทำให้ความล้มเหลวกลายเป็นสถานะปริยายของการแก้ปัญหา และการสอบเทียบนี้ทั้งตั้งใจทั้งแบกน้ำหนักทางการสอนไว้เต็มๆ: กีฬาที่ผู้เข้าแข่งคำถามฐานได้ 1 จาก 120 จะเป็นเรื่องของการรู้สึกละดไม่ได้ มันจึงกลายเป็นเกมยาวของการผัดใ้ให้น้อยลงเรื่อยๆ Codeforces ก่อตั้งปี 2010 โดย Mike Mirzayanov ที่เมือง Saratov คือโรงยิมรายวันของกีฬานี้: รอบแข่งคิดเรตติงยาวสองชั่วโมง กับบันไดสีจากมือใหม่สีเทา ผ่านฟ้าอมเขียว น้ำเงิน ม่วง ส้ม ไปถึงแกรนด์มาสเตอร์สีแดง และชั้น "ตำนาน" ดำ-แดงเหนือเรตติง 3000 Gennady Korotkevich — "tourist" ผู้เป็น Federer ของกีฬานี้ — คือคนแรกที่ทะลุเรตติง 4000 ในปี 2024 ฝั่งคณิตศาสตร์ Art of Problem Solving ก่อตั้งปี 2003 โดย Richard Rusczyk เป็นทั้งฟอรัม สำนักพิมพ์ตำรา และเรือนเพาะชำ — สมาชิกทีม IMO สหรัฐฯ รุ่นหลังๆ ส่วนใหญ่เติบโตมากับมัน

Upsolving — ลูปแกนกลาง. ธรรมเนียมปฏิบัติข้อเดียวที่ทั้งวงการเห็นพ้องกันมากที่สุด: หลังจบทุกสนาม จงแก้ข้อที่คุณพลาด — ภายในวันนั้น ก่อนความเจ็บจะจางหาย เรตติงวัดอดีต upsolving สร้างอนาคต ข้อที่พลาดบักหมุดพรหมแดนความสามารถของคุณไว้อย่างแม่นยำ และการแปลงมันจากความล้มเหลวให้กลายเป็นแบบแผนที่ครอบครองจริงคือการขยับพรหมแดนนั้น — สนามแข่งอุตสาหกรรมหาจุดอ่อนที่สุดของคุณมาให้ฟรีๆ แล้ว

upsolving คือการปฏิเสธที่จะทิ้งผลวินิจฉัยนั้นให้เสียเปล่า นักแข่งจะพูดว่าโจทย์ "เข้ามือ" ก็ต่อเมื่อมันถูกแก้ไขใหม่ตั้งแต่ศูนย์เท่านั้น เข้าใจ-จาก-เฉลยไม่นับ: การอ่านเฉลยให้ความรู้สึกเหมือนเข้าใจ แต่มีเพียงการผลิตซ้ำจากหน้ากระดาษเปล่าเท่านั้นที่พิสูจน์ว่าแบบแผนถูกติดตั้งจริง ไม่ใช่เพียงถูกชื่นชม

สมุดบันทึกพลาด. เวอร์ชันเข้มข้นกว่า ที่นักแข่งเรตติ้งสูงจำนวนมากทำกัน: ทุกการส่งที่ผิดถูกจำแนกประเภท — อ่านโจทย์พลาด อัลกอริทึมผิด off-by-one อัลกอริทึมตะกละ (greedy) ที่ไม่ได้พิสูจน์ overflow — และทุกข้อที่พลาดถูกจดบันทึกไว้ แล้วกลับมาเยี่ยมตามตารางเพื่อแก้ไขแบบไม่ดูอะไรเลย นี่คือ spaced repetition ที่นำมาใช้กับแบบแผนการให้เหตุผลแทนคำศัพท์ กองไฟทบทวนคือการแจกแจงความผิดพลาดส่วนตัวของคุณเอง ขึ้นจำแนกประเภทสำคัญพอกันกับขั้นทบทวน "ผมเสียเรตติ้งส่วนใหญ่ให้ greedy ที่ไม่ได้พิสูจน์" คือผลวินิจฉัยที่ลงมือแก้ไขได้จริง และบทที่ 10 มีคำสั่งจ่ายสำหรับโรคนี้อย่างเฉพาะ พลังของสมุดเล่มนี้อยู่ที่ตัวส่วน: เมื่อจดครบห้าสิบรายการ คุณจะรู้ base rate ของตัวเอง และ base rate จะแปลงความตั้งใจลอยๆ ให้เป็นแบบฝึกที่เล็งเป้าได้

บันไดกับกฎ +200. ฝึกเหนือระดับตัวเองเล็กน้อย — สูตรชาวบ้านคือราว 200 แต้มเรตติ้งขึ้นไป: ยากพอให้เจ็บ ใกล้เคียงให้จบ "ladders" ของ A2OJ โดย Ahmed Aly ทำไอดีนี้ให้เป็นทางการในรูปรายการโจทย์เรียงลำดับ ทุกวันนี้เรตติ้งความยากรายข้อและหลักสูตรอย่าง USACO Guide สืบทอดมันต่อ ตรรกะเบื้องหลังคือ deliberate practice ในความหมายตามตำราของ Ericsson — เวลามากที่สุด ณ ขอบของความสามารถเวลาน้อยที่สุดในเขตสบาย ต่ำกว่าขอบไม่มีอะไรถูกเรียนรู้ สูงเกินขอบไปมากก็ไม่มีอะไรถูกทำจนจบ และการทำจนจบนี้แหละคือจุดที่แบบแผนเซ็ดตัว

สู้ก่อนเปิดเฉลย. บรรทัดฐานของวงการที่เถียงกันจริงเรื่องตัวเลข แต่ไม่มีใครเถียงเรื่องหลักการ: สู้กับโจทย์อย่างถึงเนื้อถึงตัว — สามสิบถึงหกสิบนาทีของการขยับจริง ไม่ใช่หนึ่งค่าง — ก่อนเปิดอ่านเฉลย จากนั้นอ่านแค่คำใบ้เดียวแล้วลองใหม่ การอ่านเฉลยเร็วเกินไปฝึกให้จำเฉลยเป็น ไม่ใช่ผลิตเฉลยเอง การดันรนไม่ใช่ราคาที่ย่ำเพื่อแลกการเรียนรู้มันคือตัวการเรียนรู้เอง: สัญญาณจำทำของบทถัดๆ ไปถูกเดินสายเข้าสมองระหว่างการต่อสู้นี้แหละ

Stress testing. ระเบียบวิธีทางวิทยาศาสตร์ฉบับนักเขียนโปรแกรมแข่งขัน: เมื่อคำตอบน่าสงสัย จงเขียน brute force ท้าบรรทัด ตัวสุมทดสอบ และดูที่ diff ผลของทั้งคู่จนตัวอย่างค่านขนาดเล็กสุดหล่นออกมา นักแข่งแข็งแรงๆ ทำสิ่งนี้กลางสนาม — มันแปลง "ผมเชื่อ greedy ของผม" ให้เป็นหลักฐานภายในหนึ่งนาที สังเกตรูปทรงของนิสัยนี้ให้ดี — เป็นจักรกล เป็นปรปักษ์ และเล็งเข้าหาตัวเอง มันถ่ายโอนตรงไปสู่การตรวจสอบผลลัพธ์ของเครื่องจักร ประเด็นที่ภาค V จะย้ำให้นัก

สนามจำลอง (virtual contest). นำสนามเก่ามารันใหม่ได้นำพิกการจริง กติกาเต็ม สิ่งนี้ฝึกเมตาทักษะที่ไม่มีรายการโจทย์ใดสอน: อ่านโจทย์ทุกข้อก่อน เรียงลำดับตามคำคาดหมาย ตัดสินใจว่าเมื่อไรควรทิ้งแนวทาง — หน้าปัดของ Schoenfeld ที่ถูกจับมาฝึกอย่างจริงจัง — และการเอาอยู่กับการแพนิกของนาฬิกาที่ 100 ทีม ICPC ซ้อมโลจิสติกส์ว่าใครแต่ละคีย์บอร์ดเมื่อไร เหมือนทีมพิทในสนามแข่งรถ ทั้งหมดนี้ไม่มีอะไรหวือหวาเลยสักนิด และนั่นแหละคือประเด็น: วงการนี้ปฏิบัติต่อการให้เหตุผลเหมือนทักษะกล้ามเนื้อที่ฝึกได้ — มี योग มีเทคนิค และมีสมุดบันทึกประจำตัว

คัมภีร์หลัก. Pólya (1945). Problem-Solving Strategies (1998) ของ Engel ที่อัดแบบฝึกหลายร้อยข้อต่อเครื่องมือหนึ่งชิ้น The Art and Craft of Problem Solving ของ Zeitz ชุดหนังสือ AoPS และ IMO Shortlist ที่ตีพิมพ์หลังโอลิมปิกแต่ละครั้งหนึ่งปี — ธนาการโจทย์จัดเกรดของวงการและชุดฝึกของทีมชาติทุกทีม ผังเขียนโปรแกรม: Competitive Programmer's Handbook ของ Laaksonen, Competitive Programming ของ Halim และ cp-algorithms.com เป็นคู่มืออ้างอิงประจำโต๊ะทำงาน

ในหัวคนออกโจทย์

โจทย์ไม่ได้ถูกค้นพบ มันถูกผลิต — และการรู้กรรมวิธีของโรงงานก็เป็นเครื่องมือแก้โจทย์ในตัวเอง แบบเดียวกับที่ช่างกุญแจจะเดากุญแจได้ไวขึ้นเพราะรู้ว่ากุญแจถูกตัดมาอย่างไร

ใส่กรอกทำกันแบบนี้. สามแบบแผนครองตลาด เมล็ดมาก่อน (kernel-first): คนออกโจทย์เริ่มจากปรากฏการณ์ — invariant ที่ชวนตะลึง, greedy ที่ได้ผลด้วยเหตุผลไม่โจ่งแจ้ง, การจับคู่หนึ่งต่อหนึ่งระหว่างวัตถุที่หน้าตาไม่เหมือนกันเลย — แล้วห่อเรื่องเล่ารอบมัน จูนเงื่อนไขจนไอเดียที่ตั้งใจไว้ทั้งจำเป็นและเพียงพอ ตัวเรื่องเล่ามัน ไม่ว่าจะ

อัศวิน โรงงาน หรือช็อกโกแลตแท่ง คือเครื่องแต่งกายที่จิตใจให้ไม่แบกน้ำหนักอะไรเลย ย้อนจากคำตอบ (backwards-first): คนออกโจทย์ตรึงรูปทรงของคำตอบไว้ก่อน — "โครงสร้างตัวสุดชั่วควรเป็นคู่อัตราส่วนทอง" — แล้วประกอบชุดกติกาที่ทำให้สิ่งนั้นเป็นคำตอบ การออกแบบโจทย์ในฐานะการแก้โจทย์ผกผัน ฆ่าทางลัดที่ไม่ได้ตั้งใจ: ลูปร่าง โจทย์เป็นการประลอง เทสเตอร์บุกด้วย greedy ซื่อๆ, brute force และการเดา แพตเทิร์น ทุกการโจมตีราคาถูกที่ทะลุเข้ามาได้จะถูกอุด — ขยับเงื่อนไขขึ้นให้ brute force ตาย เพิ่มเทสต์ให้ greedy ที่ฟังขึ้นแต่ผิดพลัง คัดตัวอย่างในโจทย์แบบไม่ให้เผยเคล็ด ถ้า greedy ที่ฟังขึ้นรอดการทดสอบมาได้ คนออกโจทย์จะสร้างกรณีที่มีนพลาตขึ้นมาเอง — จำเรื่องนี้ไว้ตอนเหรียญ {1, 3, 4} ชุมโหมตีคุณในบทที่ 10 โจทย์ Codeforces ทุกข้อผ่าน Polygon ระบบเตรียมโจทย์ที่มีทั้ง validator, checker, generator และ stress test: ระบบ QA อุตสาหกรรมสำหรับปริศนา ส่วนที่ IMO ประเทศต่างๆ ส่งโจทย์เสนอเข้ามา Problem Selection Committee กลั่นเหลื shortlist รวบรวมสืบข้อครอบคลุมพีชคณิต คอมบินาทอริกส์ เรขาคณิต และทฤษฎีจำนวน แล้วคณะ Jury นานาชาติคัดเลือกและขัดเงาหกดข้อสุดท้าย

สามแบบแผนโรงงานนี้สำคัญเพราะแต่ละแบบทิ้งรอยนิ้วมือไว้บนโจทย์สำเร็จรูป — และรอยนิ้วมืออ่านได้ ฉะนั้นจงอ่านโจทย์ทุกข้อในฐานะสารจากผู้สร้างมัน

- **เงื่อนไขขนาดรู้ความซับซ้อนที่ตั้งใจไว้** ในสนามเขียนโปรแกรม $n \leq 20$ กระซิบบอกว่า bitmask; $n \leq 40$ ตะโกนว่า meet-in-the-middle; $n \leq 200,000$ พร้อมโจทย์ผลรวม บอกว่า $n \log n$ ตารางถอดรหัสฉบับเต็มรออยู่ในบทที่ 11 — อ่านกลับด้าน มันคือเครื่องถอดรหัสเจตนาของผู้เขียนโจทย์
- **สมมติฐานทุกข้อถูกใช้** โจทย์โอลิมปิกกระชับที่สุดเพราะแรงกดของการตรวจแก้ ถ้าโจทย์บอกจำนวนเต็มที่แตกต่างกัน ความต่างนั้นแบกน้ำหนักอยู่ ถ้ากราฟเชื่อมโยง บทพิสูจน์จะต้องใช้มัน เงื่อนไขที่คุณยังไม่ได้ใช้ ถ้าไม่ใช่กฎเงาที่คุณยังหาไม่เจอก็คือประตูที่คุณยังไม่พบ — และในทางกลับกันโดยแย่งสลักที่ "คำตอบ" ที่ไม่เคยแตะเงื่อนไขประหลาดเลย แทบแน่นอนว่าผิด
- **ความเป๊ะประหลาดคือป้ายบอกทาง** "จำนวน $2n - 1$ ตัวพอดี"; " $n^2 + 1$ พจน์" ตัวนับหน้าตาคมกริบแปลว่าขอบเขตนั้นแน่น และตัวอย่างที่แสดงความแน่นก็เป็นส่วนหนึ่งของความเข้าใจที่โจทย์ตั้งใจมอบให้ หามันให้เจอ แล้วคุณมักได้กลไกมาด้วย ตัวนับสองตัวนี้จะระเบิดขึ้นจริงในบทถัดๆ ไปทั้งคู่

- **ตำแหน่งข้อคือ prior** ข้อ 1 ของวันสอบ IMO มีคำตอบสั้นและตรงไปตรงมา — ถ้าของคุณกลายเป็นสัตว์ประหลาด จงเริ่มใหม่ โจทย์สนามระดับกลางต้องการหนึ่งไอเดียบวกการลงมือที่สะอาด ไม่ใช่โปรแกรมวิจย การสอบเทียบของคนออกโจทย์คือหลักฐานแบบเบย์ที่ได้มาฟรี และนักแก้โจทย์แข็งๆ ตั้งใจ condition บนมัน การ condition นี้ใช้ในทิศกลับได้ด้วย: ข้อ 6 ที่หน้าตากล้วยๆ คือคำเตือน ไม่ใช่ของขวัญ
- **ลายนิ้วมือทางวัฒนธรรม** มอดุลัส 998244353 — จำนวนเฉพาะ p ที่ 2^{23} หาร $p - 1$ ลงตัว — ประกาศแก่ผู้รู้ว่านี้คือ convolution แบบ number-theoretic transform เช่นเดียวกับที่ $10^9 + 7$ ประกาศว่า "แค่กันโอเวอร์โฟลว์ก็พอ" สัญญาณพวกนี้ไม่ใช่เกร็ดความรู้ มันคือคำใบ้เดียวที่แรงที่สุดบนหน้ากระดาษ เพราะมันเข้ารหัสสิ่งที่ผู้เขียนคาดหวังให้คำตอบเป็น ตัวอย่างเอาต์พุตที่หลบกรณีน่าสนใจ กำลังบอกคุณว่ากรณีน่าสนใจนั้นมียุ่จริง

ประเด็นที่ลึกกว่านั้น สำหรับหนังสือว่าด้วยการคิด: นักแก้โจทย์ระดับเชี่ยวชาญรัน theory of mind ใส่ผู้เขียนซึ่งเป็นคู่ปรับ นักออกแบบสถิติคนไหนจะใส่วรรณกรรมเข้ามาทำไม? ไม่ใช่คณิตศาสตร์เลยแม้แต่หน่อย — มันคือศาสตร์แห่งการตีความ (hermeneutics) และมันคือทักษะตัวที่ถ่ายโอนออกนอกสังเวียนได้พอดิบพอดี ไปสู่สัญญา กฎระเบียบ เบนช์มาร์ก (benchmark) และการประเมิน AI สิ่งประดิษฐ์ที่ถูกสร้างด้วยเจตนา ถอดรหัสได้เร็วที่สุดด้วยการจำลองเจตนา

เรื่องจักรมาถึง

บทที่ซื้อสัตย์ว่าด้วยสมองโอลิมปิกต้องจบด้วยข่าว กรกฎาคม 2024 AlphaProof กับ AlphaGeometry 2 ของ DeepMind ไปถึงระดับเหรียญเงินบนข้อสอบ IMO ปีนั้น — 28 จาก 42 คะแนน ต่ำกว่าเส้นเหรียญทองหนึ่งคะแนน — พร้อมดอกจันทน์ดอก: ข้อเรขาคณิตลึกลงในไม่กี่วินาที แต่บางข้อที่เหลือกินเวลาเป็นวันๆ เกินเงื่อนไขสนามจริงไปไกล หนึ่งปีถัดมาดอกจันทน์ก็หายไป กรกฎาคม 2025 Gemini Deep Think ถูกตัดเกรดอย่างเป็นทางการที่มาตรฐานเหรียญทองของ IMO 2025 — 35 จาก 42 ภายในกรอบเวลาสี่ชั่วโมงครึ่ง ทำงานด้วยภาษาธรรมชาติ — และ OpenAI ประกาศผลทดลองระดับใกล้เคียงกันในสัปดาห์เดียวกัน ณ กลางปี 2026 โมเดลแนวหน้ายังเล่นระดับแกรนด์มาสเตอร์บวกบนเบนช์มาร์กเขียนโปรแกรมแข่งขันอีกด้วย ทุกข้อความในย่อหน้านี้ประทับวันที่ไว้โดยเจตนา — ในแนวเรื่องนี้ ข้อความที่ไม่ลงวันที่คือข้อความที่ผิดไปเรียบร้อยแล้ว

คำถามที่แพร่จิงลอยค้างอยู่เหนือทุกสิ่งที่บ่นนี้บรรยาย: จะฝึกมนุษย์ไปทำไม ในสิ่งที่ศูนย์ข้อมูลคว่ำเหรียญได้?

ถ้อยคำถามนี้ไว้มาก่อน มันเป็นของภาค IV ที่ซึ่งมันจะได้รับวันที่ ตัวเลข และเซอร์ไพรส์เป็นครั้งแรก แทนที่จะได้แค่การยกไหล่ แต่มีสองอย่างที่พูดได้แล้วตอนนี้ เพราะมันตามมาจากบทนี้ล้วนๆ หนึ่ง วัฒนธรรมนี้ไม่เคยเป็นเรื่องของเหรียญจริงๆ มันคือหลักสูตรที่ประณีตที่สุดที่มนุษยชาติเคยสร้างขึ้นเพื่อติดตั้งทำจำพื้นฐานลงในหัวมนุษย์ และตัวทำพื้นฐานต่างหากที่ถ่ายโอนได้ ไม่ใช่ถ้วยรางวัล สอง มองย้อนไปดูว่าวัฒนธรรมนี้ฝึกนิสัยไหนหนักที่สุด: stress-test คำตอบของตัวเอง จดบันทึกความพลาดของตัวเอง ดิ้นรนก่อนอ่านเฉลย ถอดรหัสเจตนาของผู้เขียนที่ซ่อนตัวอยู่ จิตใจที่ถูกฝึกแบบนี้ไม่ใช่แค่เครื่องผลิตคำตอบ มันคือผู้ตรวจสอบคำตอบ — ของใครก็ได้ รวมทั้งของเครื่องจักร

คลังแสงตัวจริงมาถึงจากนี้: ทำสังหารห้าทำ เครื่องมือนักสร้างห้าชิ้น วิธีมองหกแบบ — แต่ละอย่างมาพร้อมนิยาม สัญญาณจำของมัน โจทย์คู่ที่แก้ให้ดู และหนึ่งบรรทัดตรงไปตรงมาว่าเครื่องจักรทำอะไรกับมันได้แล้ว และยังทำอะไรไม่ได้ สิ่งที่คุณเพิ่งอ่านจบไปคือวิธีถือพวกมัน

แชมป์คิดอย่างไร

บทที่ 9

ทำสังหาร

เครื่องมือบางชิ้นก่อคำตอบขึ้นทีละขั้นส่วน แต่ห้าชิ้นนี้จบการต่อสู้ในตาบเดียว ทำสังหารคือข้อสังเกตเพียงหนึ่งเดียวที่ทำให้การค้นหาเชิงเอ็กซ์โพเนนเชียลหมดความจำเป็น: หนึ่งบรรทัด ณ จุดที่เครื่องจักรซึ่งทำงานโดยปราศจากนามธรรมตัวนี้จะจมน้ำตายในกองกรณี

เครื่องมือแต่ละชิ้นได้รับการปฏิบัติเหมือนกัน: นิยาม ซึ่งตำราทุกเล่มมี; สัญญาณจำ ซึ่งตำราปล่อยไว้เป็นความรู้เฉียบ — กลิ่น ที่จิตใจซึ่งฝึกมาแล้วสังเกตได้ บ่อยครั้งก่อนจะเป็นถ้อยคำเสียอีก ก่อนที่มีมือจะเอื้อมหยิบเครื่องมือ; โจทย์คู่ที่แก้ให้ดู ข้อหนึ่งสอนจบได้ในการนั่งครั้งเดียว (★★) อีกข้อระดับโอลิมปิกของแท้ (★★★★); และหนึ่งบรรทัดว่าเครื่องจักรรับมือกับมันได้แค่ไหน สัญญาณคือของจริงที่บทนี้ส่งมอบ เรียนรู้กลิ่นให้ได้แล้วเครื่องมือจะลั่นไกเอง

หลักรั้งนกพิราบ

เครื่องมือ. ใส่วัตถุมากกว่า n ชิ้นลงกล่อง n ใบ แล้วกล่องใดกล่องหนึ่งจะมีอย่างน้อยสองชิ้น โดยทั่วไป วัตถุ n ชิ้นในกล่อง k ใบ ย่อมมีกล่องหนึ่งที่ได้อย่างน้อย $\lceil n/k \rceil$ ชิ้น นั่นคือทฤษฎีบททั้งหมดแล้ว พลังของมันอาศัยอยู่ที่การเลือกกล่อง — ซึ่งโจทย์ไม่เคยให้มา มันต้องถูกประดิษฐ์ขึ้น

กลิ่น. "จงพิสูจน์ว่ามีสองตัวที่..." หรือ "จงแสดงว่ามีบางตัว..." โดยไม่มีการสร้างที่เห็นได้ชัด ปริมาณที่ถูกขีดขอบเขต: "ในบรรดาจำนวน 51 ตัวใดๆ..." "จุดห้าจุดใดๆ ในจัตุรัส..." การรับประกันที่ถูกเรียกร้องไม่ว่าปรปักษ์จะจัดเรียงอย่างไร รีเฟล็กซ์ที่ฝึกมา: ฉันบังคับวัตถุพวกนี้ให้ตกลงในหมวดหมู่เขตจำกัดแบบไหนได้บ้าง? ระยะทางชวนให้นึกถึงเซลล์เชิงเรขาคณิต การหารลงตัวชวนถึงเศษเหลือหรือส่วนคี่ ลำดับชวนถึงผลรวมนำหน้า (prefix sums) ชาวลอนดอนสองคนมีจำนวนเส้นผมบนหัวเท่ากัน — ประชากรเก้าล้านแต่จำนวนเส้นผมที่เป็นไปได้มีอย่างมากกว่าล้านค่า กล่องคือค่าจำนวนเส้นผมจำนวนเต็ม 100 ตัวใดๆ มีบล็อกที่เรียงติดกันซึ่งผลรวมหารด้วย 100 ลงตัว — กล่องคือ

เศษเหลือของผลรวมนำหน้า 101 ตัว $S_0, \dots, S_{100}$; สองตัวย่อมชนกัน และบล็อกที่คั่นกลางระหว่างมันคือผลต่างของทั้งคู่ เมื่อเล็งไปที่คอนตินิวอัม บรรทัดเดียวกันนี้ก็ประดิษฐ์การประมาณด้วยจำนวนตรรกยะ: ทฤษฎีบทของ Dirichlet — สำหรับจำนวนจริง α ใดๆ มี $q \leq N$ บางค่าที่ $|q\alpha - p| < 1/N$ — คือส่วนเศษ (fractional parts) จำนวน $N + 1$ ค่าตกลงในช่วง N ช่วง

★★ · ห้าจุดในจัตุรัส

จงพิสูจน์ว่าในบรรดาจุดห้าจุดใดๆ ในจัตุรัสหนึ่งหน่วยแบบปิด มีสองจุดที่อยู่ห่างกันไม่เกิน $\sqrt{2}/2 \approx 0.707$

หยุดตรงนี้ก็ก่อน หน้ากระดาษรอได้

เฉลย. ตัดจัตุรัสเป็นสี่ควอดแรนต์ขนาด $1/2 \times 1/2$ ห้าจุด สี่ควอดแรนต์: ควอดแรนต์หนึ่งย่อมถือสองจุด จุดสองจุดในจัตุรัส $1/2 \times 1/2$ ห่างกันได้อย่างมากเท่าเส้นทแยงมุม: $\sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2} = \sqrt{2}/2$ ■

ไม่มีคำว่าควอดแรนต์อยู่ในโจทย์เลย นักแก้โจทย์ผลิตกล่องขึ้นมาจากเองเพื่อให้ "อยู่กล่องเดียวกัน" บังคับข้อสรุปออกมา — และการเลือกกล่องสี่ใบ ไม่ใช่เก้าไม่ใช่สอง ถูกวิศวกรรมย้อนกลับมาจากเลขห้า: กล่องน้อยกว่าจุดหนึ่งใบ

ทำ — ผลิตกล่องเอง. ทฤษฎีบทได้มาฟรี กล่องคือตัวงาน จงอ่านข้อสรุปที่คุณอยากได้ แล้วประดิษฐ์หมวดหมู่ที่การชนกันภายในส่งมอบข้อสรุปนั้นมาให้

★★★★ · ลำดับเรียงที่หนีไม่พ้น

จงพิสูจน์ว่าทุกลำดับของจำนวนจริงที่ต่างกันทั้งหมด $n^2 + 1$ ตัว ย่อมมีลำดับย่อยทางเดียว — เพิ่มขึ้นหรือลดลง — ที่ยาว $n + 1$

ลองก่อนอ่านต่อ กล่องซ่อนตัวไว้แนบเนียนทีเดียว

เฉลย. แปะป้ายสองตัวเลข (x_i, y_i) ให้แต่ละตำแหน่ง i : ความยาวของลำดับย่อยเพิ่มขึ้นที่ยาวที่สุดซึ่งจบที่ i และของลำดับย่อยลดลงที่ยาวที่สุดซึ่งจบตรงนั้น สมมุติว่าไม่มีลำดับ

ย่อยทางเดียวโดยยาวถึง $n + 1$ เมื่อนั้นทุก x_i และ y_i อยู่ใน $\{1, \dots, n\}$: ป้ายต่างกันได้อย่างมาก n^2 แบบ สำหรับ $n^2 + 1$ ตำแหน่ง หลักฐานนกพิราบ: สองตำแหน่ง $i < j$ ใช้ป้ายเดียวกัน แต่ตัวเลขต่างกันทั้งหมด ดังนั้นถ้าไม่ $a_i < a_j$ — ซึ่งลำดับเพิ่มขึ้นยาวสุดที่จบที่ i ต่อท้ายด้วย a_j ได้ บังคับให้ $x_j \geq x_i + 1$ — ก็ต้อง $a_i > a_j$ บังคับให้ $y_j \geq y_i + 1$ ไม่ว่าทางไหนป้ายย่อมต่างกัน ชัดแจ้ง ■

นี่คือ Erdős–Szekeres (1935) ซึ่งแบกสัญญาณบอกใบ้ของคนออกโจทย์จากบทที่ 8 มาเต็มตัว: " $n^2 + 1$ พจน์" คือความเป๊ะประหลาด — n^2 พจน์ยังหลบได้ ด้วยบล็อกกลดลง n บล็อก บล็อกละ n ตัว โดยแต่ละบล็อกสูงกว่าบล็อกก่อนหน้า กล่องในที่นี้คือคู่สถิติเกี่ยวกับตัววัตถุเอง: ไม่มีใคร "เห็น" กล่อง n^2 ใบในโจทย์ นักแก้สร้างลายนิ้วมือสองพิคัดขึ้นมาโดยเจาะจงให้การชนกันเป็นไปได้ แล้วจึงนับลายนิ้วมือ คลาสสิกคู่หูที่วิ่งด้วยเชื่อเพลิงเดียวกัน: จำนวน $n + 1$ ตัวใดๆ จาก $\{1, \dots, 2n\}$ มีตัวหนึ่งหารอีกตัวลงตัว — เขียนแต่ละตัวเป็น $2^k \cdot m$ โดย m เป็นจำนวนคี่ ส่วนคี่มีอยู่เพียง n แบบ สองจำนวนย่อมใช้ส่วนคี่ร่วมกัน และตัวที่กำลังต่ำกว่าหารอีกตัวลงตัว

ทำ — ประทับลายนิ้วมือแล้วบังคับชน. แปะสถิติทางเดียวจนกว่าการชนกันจะกลายเป็นเรื่องเหลวไหล แล้วบังคับให้ชนด้วยการนับ กลเม็ดป้ายคู่ตัวนี้โผล่ซ้ำทั่วคอมบินาทอริกส์

เครื่องจักรกับท่านี. การตรวจบทพิสูจน์รังนกพิราบเป็นเรื่องจืดจาง แต่การหากล่องคือการประดิษฐ์เหนือปริภูมิต้นของการแบ่งส่วน — และ Haken พิสูจน์ในปี 1985 ว่าระบบพิสูจน์แบบ resolution ซึ่งเป็นเครื่องยนต์ในตัวแก้ SAT แบบคลาสสิก ต้องใช้บทพิสูจน์ยาวเชิงเอ็กซ์โพเนนเชียลกับสูตรรังนกพิราบเสียเอง หนึ่งนามธรรมของมนุษย์หนึ่งกำแพงเอ็กซ์โพเนนเชียลที่ถูกเดินอ้อม

ปริมาณไม่แปรเปลี่ยนและปริมาณวิ่งทางเดียว

เครื่องมือ. ปริมาณไม่แปรเปลี่ยน (invariant) คือปริมาณที่ไม่มีการเดินถูกกติกาครั้งใดเปลี่ยนแปลงมันได้ — ประจูนุรักษ์ จะพิสูจน์ว่าเป้าหมายไปไม่ถึง จงแสดง invariant ที่มีค่าต่างกันระหว่างจุดตั้งต้นกับเป้าหมาย ส่วนปริมาณวิ่งทางเดียว (monovariant) เคลื่อนที่ทิศทางเดียวเท่านั้น ใช้มันพิสูจน์ว่ากระบวนการต้องหยุด และมองว่ามันจบลง

ตรงไหนได้บ้าง นี่คือการท้าทายการสลับ 14–15 ในบทที่ 2: ภาวะคู่คี่ของการเรียงสับเปลี่ยน คุณภาวะคู่คี่ของแถวช่องว่างไม่มีวันเปลี่ยน เงินรางวัลพันดอลลาร์ของ Loyd จึงไม่เคยตกอยู่ในอันตราย

กลืน. โจทย์บรรยายการเดินทาง — "ลบตัวเลขสองตัวแล้วเขียน..." "ก็กำลังสองตัวเจอกันแล้ว..." "พลิกแถวไหนก็ได้" — แล้วถามว่า ไปถึงตรงนี้ได้ไหม? มันหยุดไหม? จบแบบไหนได้บ้าง? ห่วงโซ่รีเฟล็กซ์: คำนวณปริมาณราคาถูกสักสองสามตัว (ผลรวม, ผลรวม mod 2, mod 3, เครื่องหมายของผลคูณ, จำนวนคู่สลับลำดับ) ก่อนและหลังการเดินทางทั่วไปหนึ่งครั้ง อะไรที่รอดมาโดยไม่เปลี่ยนคือผู้ทำชิงของคุณ สำหรับเรื่องการยุติ จงล่าปริมาณมีขอบเขตที่ถูกบังคับให้วิ่งทางเดียว นิสัยชั้นลึก: เมินวิถีโคจรไปเลย แล้วศึกษาว่าพลวัตอนุรักษ์อะไรไว้ — สัญชาติญาณของ Noether ฉบับย่อส่วน

★★ • การลดทอนบนกระดานดำ

ตัวเลข 1 ถึง 10 ยืนเรียงอยู่บนกระดานดำ หนึ่งการเดินทาง: ลบสองตัวใดๆ a และ b ออก แล้วเขียน $|a - b|$ แทน หลังเก้าการเดินทางจะเหลือตัวเลขตัวเดียว มันเป็น 0 ได้หรือไม่?

หยุดก่อน ลองเดินในหัวสักสองสามตา

เฉลย. ติดตาม S ผลรวมของทุกอย่างบนกระดาน mod 2 หนึ่งการเดินทางเปลี่ยนผลรวมไป $(a + b) - |a - b| = 2 \cdot \min(a, b)$ — จำนวนคู่ — ดังนั้น $S \bmod 2$ ไม่มีวันเปลี่ยน มันเริ่มที่ $1 + 2 + \dots + 10 = 55$ ซึ่งเป็นจำนวนคี่ ตัวเลขสุดท้ายจึงเป็นคี่ และโดยเฉพาะอย่างยิ่งไม่มีทางเป็น 0 ■ (การจบด้วยจำนวนคี่ทำได้จริงลงไปจนถึง 1; invariant ระบุเป้าว่าการจบแบบไหนถูกห้าม)

กราฟความไปถึงได้ของเกมนี้มีสถานะนับพัน invariant ยุบมันเหลือสอง

ทำ — หาประจุนุรักษ์. ตัดสินความไปถึงได้โดยไม่ต้องสำรวจสักกิ่งเดียว: คำนวณสิ่งที่ทุกการเดินทางรักษาไว้ แล้วเทียบจุดตั้งต้นกับเป้าหมาย

★★★★ · ทำเหลี่ยมที่ต้องหยุด

(IMO 1986 ข้อ 3.) จำนวนเต็ม $x_1, \dots, x_5$ ประจําอยู่ตามมุมของรูปห้าเหลี่ยม ผลรวมทั้งหมด $s > 0$ เมื่อใดที่ค่ามุมสําคัญ y ติดลบ คุณสามารถแทนที่สามตัวเรียงติดกัน (x, y, z) ด้วย $(x + y, -y, y + z)$ จงพิสูจน์ว่ากระบวนการนี้จําต้องยุติ

หยุดตรงนี้ — เช็กก่อนว่าการเดินหนึ่งครั้งปล่อยอะไรไว้ไม่แตะต้อง

เฉลย. การเดินอนุรักษ์ผลรวม: $(x + y) + (-y) + (y + z) = x + y + z$ ผลรวมจึงคงอยู่ที่ $s > 0$ ตลอดกาล คราวนี้นิยาม $f(x_1, \dots, x_5) = \sum_i (x_i - x_{i+2})^2$ ดัดขึ้นคิด mod 5 — จำนวนเต็มไม่เป็นลบ ใช้การเดินที่ตำแหน่ง 4 (สมมาตรเชิงวัฏจักรทำให้กรณีนี้เป็นตัวแทนได้) โดย $y = x_4 < 0$ สี่ในห้าพจน์ของ f เปลี่ยนไป; $(x_3 - x_5)^2$ รอด เพราะปลายทั้งสองข้างของมันเลื่อนไป y เท่ากัน กระจายกำลังสองสี่พจน์ที่ได้รับผลกระทบแล้วตัดทอนกัน:

$$\Delta f = [-2y(x_1 - x_3) + y^2] + 4x_2y + 4x_1y + [2y(x_5 - x_2) + y^2] = 2y(x_1 + x_2 + x_3 + x_5) + 2y^2 = 2y \cdot s.$$

เนื่องจาก $y < 0 < s$ ทุกการเดินจึงลดค่า f อย่างเคร่งครัด จำนวนเต็มไม่เป็นลบที่ลดลงอย่างเคร่งครัดยอมให้เดินได้เพียงจํากัดครั้ง ■

คราวนี้ถึงส่วนที่ซื่อสัตย์: ไม่มีใครเสก f ออกมาด้วยรสนิยมล้วนๆ ในห้องสอบ คุณต้องล่าคุณต้องการจำนวนเต็มไม่เป็นลบที่พิสูจน์ได้ว่าตกลง ผลรวมและรูปเชิงเส้นถูกอนุรักษ์ — ใช้การไม่ได้ — คุณจึงลองรูปกำลังสองตามธรรมชาติ $\sum x_i^2$, $\sum (x_i - x_{i+1})^2$, $\sum (x_i - x_{i+2})^2$ คำนวณ Δ ของแต่ละตัว จนกว่าจะมีตัวหนึ่งแยกตัวประกอบผ่าน s ได้ ในปี 1986 มีนักเรียนแก้ข้อนี้ได้เพียงสิบเอ็ดคน ช่องว่างระหว่างการตรวจ invariant กับการประดิษฐ์มัน คือช่องว่างระหว่าง ★★ กับ ★★★★★

แบบฝึกคู่หู: กิ้งก่าแดง 13 เขียว 15 น้ำเงิน 17 ตัว เมื่อสองตัวต่างสีพบกัน ทั้งคู่เปลี่ยนเป็นสีที่สาม สีเดียวล้วนทั้งฝูงเป็นไปไม่ได้ — การพบกันทุกครั้งขยับผลต่างรายคู่ของจำนวนตัวไป 0 หรือ ± 3 ผลต่าง mod 3 จึงถูกอนุรักษ์ พวกมันเริ่มที่ 2, 2, 1 ขณะที่สถานะสีเดียวล้วนต้องการเลข 0

ทำ — เมื่อไม่มีอะไรถูกอนุรักษ์ จงหาสิ่งที่เอาแต่ตก. การยุติต้องการปริมาณทางเดียวที่มีขอบเขต ล่ามันในกรอบครัวฟังก์ชันที่ใส่พารามิเตอร์ไว้ แล้วปล่อยให้พีชคณิตเลือกสมาชิกให้เอง

เครื่องจักรกับท่าน. การเช็ค invariant คือพีชคณิตบรรทัดเดียว การค้นพบมันคือการสังเคราะห์เหนือปริภูมิฟังก์ชันอนันต์ — ปัญหาเดียวกันในชื่อ loop-invariant inference ยังเป็นคอขวดเบนช์มาร์กในการทวนสอบโปรแกรม และโมเดลภาษาทำได้ดีกับ invariant ที่โด่งดัง แต่ทำได้แย่กับพลวัตที่เพิ่งถูกผลิตสดใหม่

หลักตัวสุดท้าย

เครื่องมือ. สอบปากคำพยานตัวสุดท้าย: ตัวใหญ่สุด เล็กสุด ตัวแรก ใกล้สุด กรณีขอบโหมดหนึ่ง — โครงสร้าง: ความสุดท้ายของวัตถุตัวสุดท้ายห้ามโครงแบบบางอย่างรอบตัวมันไว้ ซึ่งคือคานจัดที่คุณต้องการพอดี โหมดสอง — ตัวอย่างค่านเล็กสุด, descente infinie ของ Fermat: สมมุติว่าตัวอย่างค่านมีอยู่ หยิบตัวเล็กสุด สร้างตัวที่เล็กกว่าขึ้นมา ดังนั้นย่อมไม่มีเลย การไต่ลงในหนึ่งลมหายใจ: ถ้า $\sqrt{2} = a/b$ โดย b เล็กสุด แล้ว $a^2 = 2b^2$ บังคับให้ $a = 2c$ ตามมาด้วย $2c^2 = b^2$ — และ (b, c) คือการแทนที่เล็กกว่าอย่างเคร่งครัด จบเห่ โครงกระดูกเดียวกันจัดการ $x^4 + y^4 = z^4$ ผลงานนัซอร์ของ Fermat เอง

กลืน. "มีสมาชิกที่มีสมบัติ P " ในกองยุ่งเหยิงจำกัด — ถามก่อนว่าตัวมากที่สุดหรือน้อยสุดได้ P มาฟรีหรือเปล่า โครงแบบใดๆ ที่ "หยิบตัวการเลวร้ายที่สุดมาปรับปรุง" จะทำได้ เราคณิตกับคูใกล้สุด วงกลมเล็กสุด มุมน้อยสุด ก่อนประดิษฐ์เครื่องจักรกลไก จงถามว่าสมาชิกตัวสุดท้ายรู้อะไรอยู่แล้วบ้าง: ตัวสุดท้ายแถมเครื่องผลิตข้อขัดแย้งมาให้ฟรี เพราะสิ่งที่สุดท้ายยิ่งกว่ามันเป็นไปไม่ได้โดยข้อกำหนด

★★ · ราชาแห่งทัวร์นาเมนต์

ในทัวร์นาเมนต์แบบพบกันหมด — ทุกคู่เล่นกันหนึ่งครั้ง ไม่มีเสมอ — จงพิสูจน์ว่ามีผู้เล่น v ที่ผู้เล่นอื่นทุกคนถ้าไม่แพ้ v เอง ก็แพ้ให้ใครสักคนที่แพ้ v

หยุดก่อน คุณจะเสนอชื่อใคร?

เฉลย. เสนอชื่อ v ผู้เล่นที่มีจำนวนชัยชนะมากที่สุด สมมติว่ามี u ที่ไปถึงไม่ได้ในสองก้าว: เมื่อนั้น u ชนะ v และ u ยังชนะทุกคนที่ v เคยชนะด้วย — เพราะถ้า v ชนะ w และ w ชนะ u แล้ว u จะไปถึงได้ ดังนั้นรายชื่อเหยื่อของ u รวมเหยื่อทั้งหมดของ v บวกตัว v เอง: $\text{wins}(u) \geq \text{wins}(v) + 1$ ขัดแย้งกับความมากที่สุด ■

ไม่มีอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ ไม่มีการสร้าง ไม่มีอัลกอริทึม ตัวมากที่สุดถูกบังคับให้สมบัตินี้ เพราะการละเมิดจะผลิตบางสิ่งที่ยิ่งกว่าตัวมากที่สุดขึ้นมา

ทำ — ถามว่าตัวมากที่สุดรู้อะไรอยู่แล้ว. การเลือกตัวสุดชั่วเพียงครั้งเดียวแทนที่การค้นหาลึกลับ

★★★★ · เส้นตรงของ Sylvester

เซตจำกัดของจุดบนระนาบ ซึ่งไม่ได้อยู่บนเส้นตรงเดียวกันทั้งหมด จงพิสูจน์ว่ามีเส้นตรงบางเส้นที่ผ่านจุดสองจุดของเซตโดยไม่มีจุดที่สามของเซตอยู่บนมัน (Sylvester ตั้งโจทย์นี้ในปี 1893 มันยื่นเปิดอยู่ราวสี่สิบปี บทพิสูจน์ข้างล่างเป็นของ L. M. Kelly — ที่ถูกขนานนามกันกว้างขวางว่าเป็นบทพิสูจน์จาก The Book)

หยุดก่อน คุณจะเลือกทำอะไรให้น้อยสุด?

เฉลย. พิจารณาทุกคู่ (P, ℓ) โดย ℓ เป็นเส้นตรงที่ผ่านอย่างน้อยสองจุดของเซต และ P เป็นจุดของเซตที่ไม่อยู่บน ℓ คู่เช่นนี้มีอยู่จริง เพราะเซตไม่อยู่ร่วมเส้นเดียว และมีจำนวนจำกัด — จงเลือกคู่ที่ทำให้ระยะจาก P ถึง ℓ น้อยสุด ข้ออ้าง: ℓ บรรทุกจุดสองจุดพอดี สมมติว่ามันบรรทุกสามจุด ลากเส้นตั้งฉากจาก P ลงบน ℓ ให้เท้าฉากคือ F ในสามจุดนั้น สองจุดย่อมอยู่ฝั่งปิดเดียวกันของ F : เรียกมัน A (ใกล้ F กว่า อาจอยู่ที่ F พอดี) กับ B (ไกลกว่า) ลำดับตามแนว ℓ จึงเป็น F, A, B โดยที่ $A \neq B$ ทั้งนี้ A ไม่อยู่บนเส้น PB — มิฉะนั้น PB จะตัด ℓ สองครั้งและ P จะต้องอยู่บน ℓ คราวนี้นับพื้นที่สามเหลี่ยม ABP สองทาง: $\frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot d(P, \ell) = \frac{1}{2} \cdot |PB| \cdot d(A, PB)$ ดังนั้น $d(A, PB) = d(P, \ell) \cdot |AB|/|PB|$ แต่ $|PB| = \sqrt{(PF)^2 + (FB)^2} > FB \geq AB$ เพราะ P อยู่บนนอกเส้น ($PF > 0$) และ B อยู่พ้น A ออกไป ($FB \geq AB$) เพราะฉะนั้น $d(A, PB) < d(P, \ell)$: คู่จุด-เส้นที่ใกล้กันยิ่งกว่าค่าน้อยสุด ขัดแย้ง ■

สี่สิบปีของการบุกที่ล้มเหลว แล้วก็มาจบด้วยครึ่งหน้ากระดาษที่ไอเดียเดียวของมัน คือการเลือกจะทำอะไรให้น้อยสุด — และมีมือข้างอยู่กับการเลือกนั้น: วัตถุร่วมจุด-เส้น ไม่ใช่อย่างใดอย่างหนึ่งโดดๆ "แล้วฉันจะไปหาสิ่งนี้เจอได้อย่างไร?" คำตอบซื่อๆ คือเช็ค ลิสต์ ที่รันแบบเดียวกับนักหมากรุกไล่รายการทางรุก: คู่มือที่สุด? มุมเล็กที่สุด? พื้นที่น้อย สุด? ระยะจุด-เส้นน้อยสุด?

ทำ — เลือกจะทำอะไรให้น้อยสุด. หลักตัวสุดชั่วแข็งแรงได้เพียงเท่าฟังก์ชันนัลที่ คุณยื่นให้มัน จงไล่รายการผู้ทำซึ่งอย่างจงใจ

เครื่องจักรกับทำนี้. การคำนวณ argmax เสร็จในพริบตา แต่การกวัดแกว่งความสุดชั่ว เป็นคานงัดของบทพิสูจน์หมายถึงการประดิษฐ์สิ่งที่จะเอามาหาค่าสุดชั่ว — คอขวดกล่อง รังนกพิราบตัวเดิมอีกครั้ง; ส่วนอันดับของการไต่ลงก็คือ "termination measures" ที่ตัว ทวนสอบอัตโนมัติยังต้องพึ่งมนุษย์จัดทำให้

สมมาตรและการจับคู่

เครื่องมือ. ใช้ประโยชน์จากการแปลงที่รักษาโจทย์ไว้ไม่เปลี่ยน สามรูปแบบมาใช้งาน การจับคู่: จับวัตถุเป็นคู่ให้แต่ละคู่แบกส่วนร่วมคงที่หรือหักล้างกันเอง การเล่นเกม: ใน เกม ตอบทุกการเดินของคู่ต่อสู้ผ่านสมมาตร อนาคตจึงถูกตอบไว้ล่วงหน้า การขโมย กลยุทธ์: สมมาตรระหว่างผู้เล่นทั้งสองแสดงว่าการเดินแถมของผู้เล่นแรกไม่มีทางเป็น โทษ — ชัยชนะของผู้เล่นแรกจึงมีอยู่ไม่ว่าจะแสดงตัวมันออกมาได้หรือไม่ก็ตาม

กลั่น. พจน์ที่มาเป็นคู่เต็มเต็มกัน — k กับ $n + 1 - k$, สับเซตกับส่วนเติมเต็มของมัน, ตัว หาร d กับ n/d จุดศูนย์กลาง แกน อินโวลูชัน: ปฏิบัติการที่ย้อนคืนตัวเอง "ใครชนะเมื่อ เล่นสมบูรณ์แบบ?" บนกระดานสมมาตร รีเฟล็กซ์: ถ้าอินโวลูชันแล้วถามว่าจุดตรึงของ มันคืออะไร ผลรวมยุบตัวลง บทพิสูจน์การมีอยู่หล่นออกมาจากสมาชิกที่ไร้คู่ (การจับคู่ที่ โด่งดังที่สุดในคณิตศาสตร์คือตำนานห้องเรียนว่าด้วยเด็กชาย Gauss — ตัวเรื่องเล่า และ สิ่งที่ผิดในเรื่องเล่า นั้น ปิดท้ายบทที่ 11)

★★ · เหยียบบนโต๊ะกลม

ผู้เล่นสองคนผลัดกันวางเหยียบกลมแบบเดียวกันลงบนโต๊ะกลม ห้ามเหยียบซ้อนทับกัน ใครหมดที่ว่างก่อนแพ้ ใครชนะ?

หยุดก่อน โต๊ะกลมมาไม่ใช่เรื่องบังเอิญ

เฉลย. ผู้เล่นแรก — ด้วยการชิงยึดจุดสมมาตรกับตัวเองเพียงจุดเดียวที่มี การเดินที่ 1: วางเหยียบกลางโต๊ะเป๊ะ จากนั้นเล่นกระเจก: เมื่อไรที่คู่ต่อสู้วางที่จุด S จงตอบที่ S' ภาพหมุน 180° ของมันรอบจุดศูนย์กลาง invariant: หลังการเดินของคุณทุกครั้ง โครงแบบทั้งหมดสมมาตรได้การหมุนนั้น ดังนั้นเมื่อคู่ต่อสู้หาที่ว่างถูกกติกา S ใดๆ ได้ กระเจก S' ของมันย่อมว่างอยู่ — เพราะตำแหน่งสมมาตรอยู่แล้วก่อนการเดินของเขา — และถูกกติกา เพราะมันพื้นภาพกระเจกของทุกสิ่งที่ S พื้น; อีกทั้ง $S' \neq S$ เพราะจุดตรงเดียวของการหมุน คือจุดศูนย์กลาง ถูกยึดไปตั้งแต่การเดินที่หนึ่งแล้ว โต๊ะมีพื้นที่จำกัด สักคนย่อมหมดที่ว่าง และคนนั้นไม่มีวันเป็นคุณ ■

ผู้เล่นสายกระเจกไม่เคยต้องคำนวณ สมมาตรตอบทุกคำถามในอนาคตไว้ล่วงหน้า — กลยุทธ์ที่สมบูรณ์ถูกบีบอัดลงในประโยคเดียว

ทำ — ยึดจุดตรง แล้วเล่นกระเจก. ใครครองสมมาตร คนนั้นครองเกมช่วงปลายกระดาน

★★★ · นิม หรือกระเจกที่ทำจากบิต

หินสามกอง: 3, 4, 5 หนึ่งการเดินหยิบหินจำนวนบวกเท่าไรก็ได้จากกองเดียวกองใดกองหนึ่ง ใครหยิบหินก้อนสุดท้ายชนะ ใครชนะ และชนะอย่างไร?

หยุดก่อน เล่นเวอร์ชันสองกองให้ดูก่อน — เช่น 2 กับ 2

เฉลย. สองกองเท่ากันพ่ายให้การเล่นกระเจกล้วนๆ: ผู้เล่นที่สองเดินซ้ำทุกการเดินบนอีกกอง คินสภาพ (n, n) หลังทุกเทิร์น — คำตอบมีอยู่เสมอ หินก้อนสุดท้ายจึงเป็นของเขา กองไม่เท่ากัน: ผู้เล่นแรกทำให้เท่า แล้วกลายเป็นกระเจกเสียเอง

ทฤษฎีบทของ Bouton (Charles Bouton, 1901 — การวิเคราะห์ที่ก่อตั้งทฤษฎีเกมคอมพิวเตอร์) วางนัยทั่วไปให้กระจกกับกองก็กองก็ได้ เขียนขนาดกองเป็นเลขฐานสอง ตำแหน่งหนึ่งเป็นฝ่ายแพ้สำหรับผู้ถึงตาเดิน ก็ต่อเมื่อทุกหลักฐานสองมีเลข 1 เป็นจำนวนคู่ — สมมูลกับว่า XOR ของขนาดกองทั้งหมด หรือ nim-sum เท่ากับ 0 ทั้งสองทิศทางใช้ข้อสังเกตทิศละหนึ่ง จากตำแหน่งศูนย์ การเดินใดๆ แก่ไขกองเดียว พลิกอย่างน้อยหนึ่งบิต — บางหลักกลายเป็นคู่ สมดุลพึงเสมอ จากตำแหน่งไม่เป็นศูนย์ จมกองหลักไม่สมดุลที่สูงที่สุด บางกองย่อมมี 1 ตรงนั้น การทดกองนั้นให้เหลือ (ตัวมันเอง XOR กับ nim-sum) จะคืนสมดุลให้ทุกหลัก — และมันเป็นการทดจริง เพราะบิตนำหน้าที่เปลี่ยนของมันพลิกจาก 1 เป็น 0 ตำแหน่งว่างเปล่ามี XOR เท่ากับ 0 และผู้ถึงตาเดินของมันแพ้ไปเรียบร้อยแล้ว นโยบายชนะจึงเรียบง่าย: ยืนศูนย์ให้คู่ต่อสู้เสมอ

ที่นี้: 3, 4, 5 = 011, 100, 101 XOR ได้ 010 $\neq$ 0 ผู้เล่นแรกจึงชนะ หลักสองคือหลักที่ไม่สมดุล และมีเพียงกอง 3 ที่มี 1 ตรงนั้น: เล่น 3 $\rightarrow$ 3 $\oplus$ 2 = 1 ตรวจ: 001, 100, 101 — ทุกหลักเป็นคู่ นี่คือการเปิดเกมชนะเพียงหนึ่งเดียว การจะคืนสมดุลผ่านกอง 4 หรือกอง 5 จะบังคับให้พวกมันต้องโตขึ้น ■

กองเท่ากันคือกรณีพิเศษที่กระจกอธิบายได้: (n, n) สมดุลกันหลักต่อหลัก ศูนย์ของ Bouton คือการเล่นกระจกที่ถูกวางนัยทั่วไป — เมื่อกระดานไม่มีสมมาตรเชิงเรขาคณิตให้ใช้ จงสร้างสมมาตรเชิงเลขคณิตขึ้นมาเองแล้วรักษาสมดุลของมันไว้

ทำ — จับคู่บิต. อินโวลูชันอาศัยอยู่ในเลขคณิตได้ ไม่จำเป็นต้องอยู่บนกระดาน จงหาปริมาณที่สถานะสมดุลของมันคุณก็คืนได้เสมอ ส่วนคู่ต่อสู้ไม่มีวันรักษาไว้ได้

★★★★ · ขอมป์ กับกลยุทธ์ที่ถูกขโมย

Chomp (David Gale, 1974): ซ็อกโกแลตแท่งขนาด $m \times n$, $mn \geq 2$ โดยช่องมุมล่างซ้ายอาบยาพิษ หนึ่งการเดิน: เลือกช่องที่เหลืออยู่ช่องใดก็ได้ แล้วกินมันพร้อมทุกช่องที่อยู่เหนือและอยู่ขวาของมัน ใครกินช่องยาพิษแพ้ จงพิสูจน์ว่าผู้เล่นแรกชนะ — สำหรับทุกขนาดกระดาน — ทั้งที่ไม่มีใครรู้จักกลยุทธ์ชนะแบบทั่วไปเลย

หยุดตรงนี้ คุณจะหากลยุทธ์ไม่เจอหรอก นั่นแหละคือประเด็น

เฉลย. Chomp เป็นเกมจำกัด กำหนดแน่นอน สारสนเทศสมบูรณ์ และเสมอกันไม่ได้ — โดยการอุปนัยย้อนกลับ (Zermelo) จึงมีฝ่ายเดียวพอดิที่ครอบครองกลยุทธ์ชนะ สมมุติว่าเป็นผู้เล่นที่สอง ให้ผู้เล่นแรกเปิดเกมด้วยการแทะที่เล็กที่สุดเท่าที่เป็นไปได้: ช่องขวาบนเพียงช่องเดียว โดยข้อสมมุติ ผู้เล่นที่สองย่อมมีคำตอบชนะ Y ที่นำไปสู่ตำแหน่ง Q ซึ่งผู้ถึงตาเดิน — ผู้เล่นหนึ่ง — เป็นฝ่ายแพ้ แต่สังเกต: การเดินของ Chomp ทุกการเดินลบช่องขวาบนออกอยู่แล้ว Q จึงคือตำแหน่งเดียวกันเป๊ะกับที่จะได้ ถ้า Y ถูกเล่นเป็นการเปิดเกมเสียเอง ผู้เล่นหนึ่งจึงสามารถเปิดด้วย Y ได้ตั้งแต่แรก จับผู้เล่นสองไปนั่งฝั่งแพ้กของ Q ขัดแย้ง — ผู้ชนะคือผู้เล่นหนึ่ง ■ บทพิสูจน์นี้ไม่เอ่ยชื่อกลยุทธ์ใดเลย และสำหรับกระดานทั่วไป การเดินเปิดเกมทีชนะยังคงไม่มีใครรู้ คำนวณสำเร็จเฉพาะกรณีเล็กๆ เท่านั้น

สมมาตรในที่นี้อยู่ระหว่างผู้เล่นทั้งสอง: อะไรก็ตามที่คำตอบชนะของคุณทำสำเร็จ ฉันก็ทำสำเร็จได้ก่อนหนึ่งการเดิน โครงกระดูกเดียวกันให้ข้อโต้แย้งของ Nash สำหรับ Hex — หมากรุกไม่เคยมเป็นโทษ — และให้ "ผู้เล่นแรกไม่แพ้" ของ tic-tac-toe

ทำ — ขโมยกลยุทธ์. พิสูจน์ว่าชัยชนะมีอยู่จริงด้วยการชิงตัดหน้ากลยุทธ์สมมุติของผู้เล่นที่สอง การมีอยู่โดยไม่ต้องแสดงตัวอย่าง

เครื่องจักรกับท่านี้. เอนจินตรวจจับและใช้ประโยชน์จากสมมาตรของกระดานเพื่อเล็มกิ่งการค้นหา แต่การขโมยกลยุทธ์คือบทพิสูจน์ที่ใช้การค้นหาเป็นศูนย์และให้นโยบายเป็นศูนย์ — reinforcement learner ฝึกเล่น Chomp จนชำนาญได้ แต่ก็ยังบอกไม่ได้ยู่ติว่าทำไมผู้เล่นหนึ่งถึงชนะ

การระบายสีและภาวะคู่

บทที่ 6 จบลงบนกระดานหมากรุกพิการ: มุมตรงข้ามสองมุมหายไป โดมิโนสามสิบเอ็ดตัวถูกยื่นให้ และคำปฏิเสธความยาวสองประโยค — โดมิโนทุกตัวคลุมช่องเข้มหนึ่งช่องกับช่องสว่างหนึ่งช่อง และมุมที่หายไปทั้งสองเป็นสีเดียวกัน คราวนี้จึงรับการวางนัยทั่วไปไป เพราะมันคือคลังแสงทั้งคลัง **เครื่องมือ:** กำหนดสีหรือน้ำหนักให้แต่ละช่อง เพื่อให้ (a) ทุกชิ้นส่วน ไม่ว่าลงจอดตรงไหน คลุมแบบแผนสีคงที่เสมอ ขณะที่ (b) ยอดนับสีรวมของกระดานเป็นยอดที่ชิ้นส่วนประกอบขึ้นมาไม่ได้ การระบายสีคือ homomorphism: มันส่งปริภูมิโหฟเฟอร์ของความพยายามปูกระเบื้องลงบนเลขคณิตจิว — ยอดนับ mod k — ที่

ซึ่งความเป็นไปไม่ได้กลายเป็นสิ่งมองเห็นได้ ข้อโต้แย้งภาวะคู่คือกรณีพิเศษสองสี ทั้งอุปกรณ์นี้คือประจุนุรักษ์ของบัพทบัญญัติจำเป็นสำหรับการปูกระเบื้อง — invariant ที่สวมเม็ดสี

กลืน. คำถามปูกระเบื้องและการคลุมพื้นที่ การท่องเที่ยวบนกริด — ทัวรมาหมากรุก เกมสลับสถานะหลอดไฟ และเหนืออื่นใดคือลายเซ็นนี้: เลขคณิตพื้นที่บอกว่าเป็นไปได้ ขณะที่ทุกความพยายามสร้างจริงฟังไม่เป็นท่าอย่างตื้อรัน ความตื้อรันนั้นคือกลืนของสิ่งกีดขวางที่ซ่อนอยู่ รีเฟล็กซ์: ลองสีแบบกระดานหมากรุก แล้วลายทาง แล้วทแยง mod k — โดยเลือก k ให้เข้าคู่กับความยาวกระเบื้อง ฐานคาบของเม็ดสีให้เข้ากับรอยเท้าของชิ้นส่วน

★★ • ตัวที่ยีสืบห้าตัว

T-tetromino ยีสืบห้าตัวปูกระดาน 10×10 ได้หรือไม่? (เช็คพื้นที่: $25 \times 4 = 100$ เลขคณิตไม่มีข้อคัดค้าน)

หยุดก่อน ระบายสีก่อน แล้วค่อยนับ

เฉลย. ระบายสีกระดานแบบกระดานหมากรุก: ช่องเข้ม 50 ช่องสว่าง 50 ไม่ว่า T-tetromino ลงจอดที่ไหน มันคลุมสามช่องของสีหนึ่งกับหนึ่งช่องของอีกสี — จำนวนช่องเข้มที่คลุมเป็นคี่ไม่ว่าทางไหน ตัวที่ยีสืบห้าตัวจึงคลุมช่องเข้มรวมเป็นผลบวกของจำนวนคี่ยีสืบห้าจำนวน: คี่ แต่กระดานมีช่องเข้ม 50 ช่องพอดี — คู่ เป็นไปไม่ได้ ■

ทำ — ให้ภาวะคู่เห็นในสิ่งที่พื้นที่ยังมองไม่เห็น. เมื่อยอดนับผ่านฉลุยแต่การสร้างฟังครั้งแรกแล้วครั้งเล่า การระบายสองสีมีกฎว่าเพราะอะไร

★★★★ • สิบคุณสิบที่ไม่ยอมแพ้ใคร

จงพิสูจน์ว่ากระดาน 10×10 ไม่อาจปูด้วย straight tetromino — กระเบื้อง 1×4 — จำนวนยีสืบห้าตัวได้ (เช็คพื้นที่ผ่านอีกเช่นเคย กับดักขึ้นล่ำพร้อมลั่น)

หยุดตรงนี้ เม็ดสีกระดานหมากรุกหยาบเกินไปสำหรับข้อนี้

เฉลย. ระบายสี่ช่อง (i, j) — นับแถวและคอลัมน์จาก 0 — ด้วย $(i + j) \bmod 4$: ลายทางทแยงคาบสี่ สมบัติทฤษฎี: straight tetromino ไม่ว่าวางนอนหรือวางตั้ง ครอบคลุมสี่ช่องที่ค่า $(i + j)$ เรียงติดกัน — จึงกินสี่ละหนึ่งช่องพอดีของสี 0, 1, 2, 3 กระเบื้องสี่สีห้าตัวจึงต้องคลุมแต่ละสีสี่ละ 25 ครั้งพอดี: การปูที่สำเร็จบังคับให้ทุกสีมี 25 ช่อง คราวนี้ทำสำมะโนกระดาน ในบรรดา $i \in \{0, \dots, 9\}$ เศษเหลือ 0 กับ 1 ปรากฏอย่างละสามครั้ง ($\{0, 4, 8\}$ และ $\{1, 5, 9\}$) เศษเหลือ 2 กับ 3 อย่างละสองครั้ง เช่นเดียวกันสำหรับ j การนับช่องที่ $(i + j) \equiv r$ คือการ convolve $c = (3, 3, 2, 2)$ กับตัวมันเอง:

- สี 0: $3 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 25$
- สี 1: $3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 26$
- สี 2: $3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 25$
- สี 3: $3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 = 24$

(เช็กสถิติ: $25 + 26 + 25 + 24 = 100 \checkmark$) สี 1 กับสี 3 ถือ 26 และ 24 ช่อง — ไม่ใช่ 25 การปูจึงไม่มีทางดำรงอยู่ ■

การระบายสีกฎวิศวกรรมมาให้เข้ากับตัวกระเบื้อง: ทแยงคาบสี่ก็เพราะกระเบื้องยาวสี่และจำกัดกินสี่ละหนึ่งช่อง (ทฤษฎีบททั่วไปที่ข่มอยู่หลังกลเม็ดนี้ — de Bruijn, 1969: สี่เหลี่ยมผืนผ้า $a \times b$ ปูด้วย $1 \times n$ ได้ก็ต่อเมื่อ n หาร a หรือ b ลงตัว) ทักษะระดับ

★★★★ ไม่ใช่การหีบการระบายสีมาใช้ แต่คือการออกแบบการระบายสีที่กระเบื้องเคารพเลขคณิตของมัน ส่วนกระดานละเมิด

หนึ่งคำเตือนเรื่องขอบเขต: การระบายสีพิสูจน์ได้เพียงความเป็นไปไม่ได้ ความเป็นไปได้ต้องการการสร้าง — และบทที่ 10 เปิดฉากด้วยเครื่องจักรแห่งการสร้าง

ทำ — วิศวกรรมการระบายสีให้เข้ากับกระเบื้อง. จับคาบของเม็ดสีให้ตรงกับรอยเท้าของชิ้นส่วน แล้วนับสิ่งที่กระดานมีอยู่จริง

เครื่องจักรกับท่านี. กระดานที่ปูไม่ได้คือกรณีเลวร้ายที่สุดของตัวแก้ SAT — John McCarthy เคยเวียนโงทย์กระดานหมากรุกพิการในฐานะ "tough nut" สำหรับกระบวนกรพิสูจน์ — ทว่าใบรับรองด้วยการระบายสี เมื่อถูกเดาขึ้นมาแล้ว เครื่องเช็คได้ในหลักไมโครวินาที การเดามันขึ้นมาต่างหากคือส่วนของมนุษย์

ห้าทำ ในปริบทเดียว

ทำ	กลิ่น	ตราประจำ
ผลิตกล่องเอง	"จงพิสูจน์ว่าต้องมีสองตัวที่ร่วม..."	ห้าจุด, $\sqrt{2}/2$
ประจุนุรักษ์ / ปริมาณวิ่งทางเดียว	ให้การเดินมา; "ไปถึงได้ไหม? หยุดไหม?"	$\Delta f = 2\text{ys}$ ของห้าเหลี่ยม
สอบปากคำตัวสุดชั่ว	"ต้องมีสมาชิกบางตัวที่..."	ราชาแห่งทัวร์นาเมนต์
กระจก จับคู่ ขโมย	กระดานสมมาตร; เล่นสมบูร์นแบบ; พจน์เป็นคู่	หลักสมมูลของนิม
ระบายสีให้ขัดแย้ง	พื้นที่ว่าได้ ความพยายามว่าไม่	สิบคูณสิบที่ไม่ยอมแพ้ใคร

ห้าวิธีจบการต่อสู้ก่อนมันจะเริ่ม — แต่ละวิธีแทนที่การค้นหาค้นหาด้วยข้อสังเกตหนึ่งข้อ ซึ่งคือเหตุผลเบ๊ๆ ว่าทำไมห้าพวกนี้จึงเป็นสิ่งที่เครื่องจักรริเริ่มเองได้ยากที่สุดแต่ตรวจได้ง่ายที่สุด เครื่องมือของบทถัดไปทำงานตรงกันข้าม พวกมันสร้าง

บทที่ 10

เครื่องมือนักสร้าง

ทำสังหารจบปัญหาด้วยการสังเกตครั้งเดียว เครื่องมือทั้งห้าชิ้นนี้ทำงานตรงกันข้าม: มันสร้าง — คำตอบ การปฏิเสธ เบื้อง ตารางงาน กลยุทธ์ — ทีละชิ้น พร้อมบทพิสูจน์ตรรกมาด้วย รูปแบบเดิม: นิยาม สัญญาณ โจทย์คู่ฝักมือ และเครื่องจักร

อุปนัย กับศิลปะแห่งการขอมากกว่าเดิม

เครื่องมือ. พิสูจน์กรณีฐาน แล้วพิสูจน์ว่าแต่ละกรณีบังคับกรณีถัดไป ฝีมือที่ไม่เห็นชัดอยู่สูงขึ้นไปหนึ่งขั้น: บางครั้งข้อความ P พิสูจน์ด้วยอุปนัยไม่ได้ แต่ข้อความที่แรงกว่ากลับแล่นฉลุย — เพราะขั้นอุปนัยได้สมมุติสมมุติฐานมาใช้ และข้อความที่แรงกว่าก็คือเครื่องมือที่แรงกว่าด้วย Pólya (โพลยา) ตั้งชื่อปรากฏการณ์นี้ว่าปฏิทรรศน์นักประดิษฐ์ (inventor's paradox): พิสูจน์ให้มากกว่าอาจง่ายกว่า นี่คือนานจัตที่สวนสัญชาตญาณที่สุดเพียงหนึ่งเดียวในการเปลี่ยนผ่านจากมือใหม่สู่นักโอลิมปิก

กลืน. ข้อความใดๆ ที่มีพารามิเตอร์ n ; โครงสร้างเวียนเกิดหรือคล้ายตัวเอง — ต้นไม้ การปฏิเสธเบื้องบนกระดาน 2^n นิพจน์ซ้อนกัน ตัวจุดขนวนของการเสริมแรงนั้นเฉพาะเจาะจงและควรค่าแก่การจำขึ้นใจ: ขั้นอุปนัยของคุณเกือบทำงาน แต่สมมุติฐานอ่อนเกินกว่าจะดันให้ผ่าน — มันต้องการข้อเท็จจริงที่ข้อความฉบับธรรมดาไม่ได้แบกมา คำตอบไม่ใช่การทิ้งอุปนัย แต่คือบรรทุกสมการที่ขาดหายไปในตัวข้อความ — ขอบเขตที่คมกว่า การจัดวางที่กว้างกว่า — แล้วรันใหม่

★★ • ผลบวกของจำนวนคี่

จงพิสูจน์ว่า $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

หยุดก่อน วาดรูปมันก่อนจะพิสูจน์มัน

เฉลย. ฐาน $n = 1$: $1 = 1^2$ ขั้นอุปนัย: สมมุติว่าผลบวกถึง $(2n - 1)$ เท่ากับ n^2 ; บวกจำนวนคี่ตัวถัดไป: $n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2$ ■ ภาพดีกว่าพีชคณิต: จัดตุ้ส $n \times n$ โตเป็น

จัตุรัส $(n + 1) \times (n + 1)$ โดยห่อเปลือกรูปตัว L หน้า $2n + 1$ ช่องพอดีรอบสองด้าน
อุปนัยในฐานะเรขาคณิตของการพอกพูน

ทำ — ได้จาก n สู่ $n + 1$. เครื่องมือที่เรียบที่สุดในเล่ม — และเป็นโครงรถที่การขัด
เกลากทุกชิ้นด้านล่างชั้นน็อตยึดเข้าใส่

★★★ • กระดานแขวง

จงพิสูจน์ว่ากระดาน $2^n \times 2^n$ ที่หายไปหนึ่งช่องใดก็ตาม ปูเต็มได้ด้วย L-tromino (สาม
ช่องเรียงเป็นรูปตัว L)

หยุดตรงนี้ บทที่ 9 พิสูจน์ว่ากระดานเป็นไปไม่ได้ คราวนี้จงสร้างขึ้นมาสักแผ่น

เฉลย. การเสริมแรงอยู่ในตัวโจทย์แล้ว — และนั่นแหละคือบทเรียน คำถามฉบับ
"ธรรมชาติ" (มุมหายหนึ่งช่อง) กลับอุปนัยยากกว่า: กระดานที่ผ่าสี่ชิ้นกระดานย่อยที่ไม่มี
มุมแหว่งมาให้ และสมมุติฐานก็ไม่มีที่ให้เกาะ จงพิสูจน์ฉบับแรงกว่า "หายช่องไหนก็ได้"
แทนฐาน $n = 1$: กระดาน 2×2 ที่หายช่องใดช่องหนึ่งคือ L-tromino หนึ่งตัวพอดี ขึ้น
อุปนัย: ผ่ากระดาน 2^{n+1} เป็นสี่จัตุภาคขนาด 2^n ; ช่องที่หายอยู่ในจัตุภาคหนึ่ง วาง
tromino ตัวเดียวตรงกลาง คลุมช่องมุมของอีกสามจัตุภาคที่เหลือ จัตุภาคละหนึ่งช่อง
บัดนี้ทุกจัตุภาคคือกระดาน $2^n \times 2^n$ ที่หายไปหนึ่งช่องพอดี — ใช้สมมุติฐานฉบับแรงกว่า
สี่ครั้ง ■ (ตรวจนับ: $(4^{n+1} - 1)/3 = 4 \cdot (4^n - 1)/3 + 1$ — ผลิตรอยแหว่งให้สามจัตุภาค
จ่าย tromino ไปหนึ่งตัว ✓)

นี่คือฝาแฝดสายสร้างของการระบายสีในบทที่ 9: สี่พิสูจน์ความเป็นไปไม่ได้ อุปนัยผลิต
ความเป็นไปได้

ทำ — วางนัยทั่วไปจนชั้นอุปนัยมีที่ให้เกาะ. ข้อความที่ทั่วไปกว่ายื่นของให้ชั้นอุปนัย
จับมากกว่า ถ้าการผ่าสี่ของปัญหาผลิตปัญหาย่อยที่สมมุติฐานของคุณแตะไม่ถึง จง
ขยายสมมุติฐานจนแตะถึง

★★★★ · เบาะรองที่ทำจากความว่างเปล่า

จงพิสูจน์ว่า $1/1^2 + 1/2^2 + \dots + 1/n^2 < 2$ สำหรับทุก n

หยุดก่อน ลองอุปนัยแบบเห็นๆ แล้วดูมันตายต่อหน้า

เฉลย. อุปนัยแบบเห็นๆ: สมมุติ $S_n < 2$; แล้ว $S_{n+1} = S_n + 1/(n+1)^2 < 2 + \text{อะไรสักอย่าง}$ ไม่มีที่ว่างเหลือ ข้อความนี้จริงแต่เป็นหมั่นเขิงอุปนัย — สมมุติฐานไม่เหลืออะไรไว้ดูดซับพจน์ใหม่

เสริมแรงมัน: พิสูจน์ $S_n \leq 2 - 1/n$ ฐาน $n = 1$: $S_1 = 1 = 2 - 1$ ขั้นอุปนัย: เมื่อได้ $S_n \leq 2 - 1/n$ เพียงพอที่จะแสดงว่า $1/(n+1)^2 \leq 1/n - 1/(n+1) = 1/(n(n+1))$ นั่นคือ $n(n+1) \leq (n+1)^2$ นั่นคือ $n \leq n+1$ ซึ่งจริง ดังนั้น $S_{n+1} \leq 2 - 1/(n+1)$ และโดยเฉพาะ $S_n < 2$ สำหรับทุก n ■

ข้อความที่แรงกว่าแบกเชื่อเพลิงของตัวเองมาด้วย: พจน์ $-1/n$ คือเบาะดูดซับที่ขั้นอุปนัยต้องการพอดีพอดี (ภายหลัง Euler แสดงว่าลิมิตแท้จริงคือ $\pi^2/6 \approx 1.645$ — เบาะของเราห่างจากค่ากลมลิบลับ และนั่นไม่เป็นไรเลย การเสริมแรงต้องเพียงปิดวงอุปนัยได้ ไม่จำเป็นต้องคม)

ทำ — เสริมแรงสมมุติฐาน. สมมุติฐานอุปนัยไม่ใช่สิ่งที่คุณต้องพิสูจน์ แต่คือสิ่งที่คุณได้หยิบมาใช้ เมื่อขั้นอุปนัยรั่ว จงถามคำถามกลับหัวของ Pólya: ข้อความที่แรงกว่าแบบไหนจะทำให้ขั้นนี้กลายเป็นเรื่องจ๊ับจ๊อย?

เครื่องจักรกับท่าน. การเสริมแรงสมมุติฐานคือการประดิษฐ์บทตั้ง (lemma) — คอขวดคลาสสิกของการพิสูจน์ทฤษฎีบทอัตโนมัติ ซึ่งมีฮิวริสติกแต่ไม่มีวิธีที่วางใจได้ — และโมเดลเลียนแบบการเสริมแรงอันโด่งดังได้ดี แต่แทบไม่เคยให้กำเนิดการวางนัยทั่วไปที่ถูกต้องขึ้นสดๆ เอง; มนุษย์รู้สึกได้ว่าขั้นอุปนัยรั่วตรงไหน แล้วปะที่ตัวข้อความ

การเวียนเกิด → Dynamic Programming

เครื่องมือ. เขียนคำตอบของปัญหาในรูปคำตอบของอินสแตนซ์ที่เล็กกว่า; เมื่อปัญหาย่อยซ้ำหน้าเดิม ก็แคชมันไว้ (memoization) หรือเติมจากล่างขึ้นบน (dynamic programming — DP) ตำราขาย DP ในฐานะเทคนิค แต่นักแข่งรู้จักมันในฐานะคำถาม

เชิงการแทน: เลือกว่า "สถานะ" คืออะไร — บทสรุปย่อที่สุดของอดีตที่อนาคตต้องใช้ — แล้วความสัมพันธ์เวียนเกิดมักเขียนตัวมันเองออกมา บันไดคลาสสิกใต้ที่ละมิติ:

Fibonacci (หนึ่งมิติ — จำนวนวิธีปูแถบ $1 \times n$ ด้วยชิ้นยาว 1 กับ 2), เส้นทางบนกริด (สองมิติ), knapsack (ทรัพยากร), bitmask DP (เซต), digit DP กับ tree DP (พรีฟิกซ์ที่มีโครงสร้าง)

กลืน. "นับจำนวนวิธี..." "ต้นทุนต่ำสุดที่จะ..." "ยาวที่สุด ... บนลำดับ กริด ต้นไม้" ปัญหาแตกตัวตามคำถาม "ทางเลือกสุดท้ายคืออะไร?" Brute force เป็นเอกซ์โพเนนเชียล แต่อัตตาที่เกี่ยวข้อจริงมีขนาดเล็ก เช็กลิสต์ของมืออาชีพ เรียงตามลำดับ: การตัดสินใจคืออะไรบ้าง? หลังพรีฟิกซ์ของการตัดสินใจชุดหนึ่ง อนาคตต้องรู้อะไรจริงๆ? — นั่นแหละคือสถานะ ทรานซิชันคือการตัดสินใจหนึ่งครั้ง; ต้นทุนคือ #สถานะ $\times$ ต้นทุนทรานซิชัน; และถ้ามันใหญ่เกินไป แปลว่าสถานะกำลังแบกขยะ — บีบอัดมันซะ

★★ · ยี่สิบเส้นทาง

มีเส้นทางโมนอโทน — เดินขวากับลงเท่านั้น — ก็เส้น จากมุมบนซ้ายสู่มุมล่างขวาของแลตทิซไหนดขนาด 4×4 จาก $(0,0)$ ถึง $(3,3)$?

หยุดก่อน แก้มุมบนซ้ายของคำถามเสียก่อน

เฉลย. สถานะ: $f(i, j)$ = จำนวนเส้นทางโมนอโทนที่มาถึงโหนด (i, j) คุณมาจากข้างบนหรือจากซ้าย ดังนั้น $f(i, j) = f(i-1, j) + f(i, j-1)$ โดยตลอดขอบเป็น 1 ทั้งหมด เติมตาราง:

	j=0	1	2	3
i=0	1	1	1	1
1	1	2	3	4
2	1	3	6	10
3	1	4	10	20

คำตอบ: **20** และมองตารางสิ — มันคือสามเหลี่ยม Pascal วางเอียง: $f(i, j) = C(i+j, i)$ ที่นี้ $C(6,3) = 20$ ✓ ■

ทำ — ตั้งชื่อสถานะ แล้วเติมตาราง. การเวียนเกิด ("ก้าวสุดท้ายมาจากซ้ายหรือบน") นั้นจืดจาง; รางวัลคือรูปปิดที่ผูกเป็นตัวขึ้นมาจากตาราง dynamic programming ในฐานะคณิตศาสตร์เชิงทดลอง

★★★★ • Knapsack ตั้งแต่ต้นจนจบ

ความจุ $W = 8$ สิ่งของ: A (น้ำหนัก 2, มูลค่า 3), B (3, 4), C (4, 5), D (5, 8) จงทำมูลค่ารวมให้มากที่สุดภายในความจุ — และจงรู้ว่าทำไมอัลกอริทึมตะกละ (greedy) จึงพลาดหยุดตรงนี้ ลองตะกละดูก่อน โดยเจตนา

เฉลย. ตะกละตามความหนาแน่นมูลค่า: $D = 1.6$, $A = 1.5$, $B \approx 1.33$, $C = 1.25$ ความตะกละกว่า D (น้ำหนัก 5) แล้วกว่า A (น้ำหนัก 2) — มูลค่า 11 น้ำหนัก 7 ไม่มีชิ้นไหนใส่ลงได้อีก **11 ไม่ใช่ค่าที่เหมาะสมที่สุด**

ที่นี้ DP สถานะ: $dp[c]$ = มูลค่าดีที่สุดในความจุ c เมื่อคิดเฉพาะสิ่งของที่ประมวลมาแล้ว; ประมวลสิ่งของทีละชิ้น กวาด c จากมากลงน้อยเพื่อให้แต่ละชั้นถูกใช้ได้อย่างมากหนึ่งครั้ง เริ่มต้นเป็นศูนย์ทั้งหมด

- หลัง A: $dp = [0, 0, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$
- หลัง B: $dp = [0, 0, 3, 4, 4, 7, 7, 7]$ (เช่น $dp[5] = \max(3, dp[2] + 4) = 7$)
- หลัง C: $dp = [0, 0, 3, 4, 5, 7, 8, 9]$ ($dp[6] = \max(7, dp[2] + 5) = 8$; $dp[7] = \max(7, dp[3] + 5) = 9$)
- หลัง D: $dp = [0, 0, 3, 4, 5, 8, 8, 11, 12]$ ($dp[7] = \max(9, dp[2] + 8) = 11$; $dp[8] = \max(9, dp[3] + 8) = 12$)

ค่าที่เหมาะสมที่สุดคือ **12 = B + D**: น้ำหนัก 3 + 5 = 8 มูลค่า 4 + 8 — เลข 11 ของความตะกละแพ้ 12 (ทวนสอบกับการแจกแจงครบทั้ง 24 สับเซต: ตัวเต็มที่เป็นไปได้คือ $A+D = 11$, $B+D = 12$, $B+C = 9$, $A+C = 8$) ต้นทุน: 4 ชั้น $\times$ 9 ระดับความจุ ≈ 36 การอัปเดตช่องตาราง แทนการเช็ค 16 สับเซต — และที่ $n = 100$, $W = 100,000$ ตารางแบบเดียวกันนี้

แทนที่ 2^{100} สับเซต คำเตือนชื่อตรงหนึ่งข้อ: $O(nW)$ เป็น pseudo-polynomial — W เป็น เอกซ์โพเนนเชียลในจำนวนหลักของตัวมันเอง — knapsack จึงยังเป็น NP-hard ■

ทำ — บีบอัดประวัติศาสตร์ให้เหลือสถิติที่พอเพียง. สถานะไม่ใช่ "หยิบขึ้นไหนไปแล้วบ้าง" (2ⁿ สถานะ) แต่คือ "ใช้ความจุไปเท่าไร" — เพราะมูลค่าคือทั้งหมดที่อนาคตต้องการ และความจุคือทั้งหมดที่พันนาการอนาคต DP ยากทุกข้อยากตรงนี้แหละ: longest-increasing-subsequence บีบ "ฟรีฟิกส์ทั้งก้อน" เหลือ "หางเล็กสุดต่อความยาว"; DP ของ traveling-salesman บีบ "เส้นทางที่ผ่านมา" เหลือ "(เซตที่เยือนแล้ว, เมืองปัจจุบัน)"; digit DP บีบ "ตัวเลขที่สร้างมา" เหลือ "(ตำแหน่ง, ยังขีดขอบบนอยู่ไหม?, สมบัติที่สะสมมา)" ทำเดียวกัน ไต่ขึ้นบันไดไปเรื่อยๆ

เครื่องจักรกับทำนี้. เครื่องมือที่เป็นมิตรกับเครื่องจักรที่สุดในคลังแสง — พอสถานะถูกนิยามแล้ว การเติมตารางคือสิ่งที่คอมพิวเตอร์เป็นอยู่แล้วโดยกำเนิด และบันไดคลาสสิกก็อ้อมตัวอยู่ในข้อมูลฝึกของพวกมัน; ขอบที่เหลือของมนุษย์คือการประดิษฐ์สถานะ — การมองออกว่าประวัติศาสตร์หน้าตาพิสดารยุบลงเหลือสถิติพอเพียงตัวเล็กๆ ได้

อัลกอริทึมตะกละกับการพิสูจน์แบบสลับขึ้น

เครื่องมือ. อัลกอริทึมตะกละ (greedy) เลือกทางที่ดีที่สุดเฉพาะหน้าแล้วไม่หวนกลับมาแก้ ความตะกละมักผิด; ยามใดที่มันถูก บทพิสูจน์มาตรฐานคือการพิสูจน์แบบสลับขึ้น (exchange argument): หยิบคำตอบที่เหมาะสมที่สุด OPT ใดๆ มา แสดงว่าสลับตัวเลือกหนึ่งของมันเป็นตัวเลือกของตะกละได้โดยไม่แย่งลง แล้วอุปนัยต่อ — ผลลัพธ์ของตะกละจึงแทบเท่า OPT (ฉบับโครงสร้างลึกลับกว่าตะกละเหมาะสมที่สุดพอดีเป๊ะบน matroid; นักแข่งส่วนใหญ่ควงบทตั้งสลับขึ้นกันตรงๆ)

กลั่น. จัดตารางเวลา คัดเลือก ผสาน เรียงลำดับ — ที่ใดก็ตามที่ sort ตามกุญแจที่ถูกต้องฟังดูมีเค้า และอนาคตขึ้นกับอดีตผ่านแค่ยอดสะสมหรือแนวหน้าเท่านั้น รีเฟล็กซ์ที่มีวินัยต้องสองด้าน: ลำการสลับขึ้น และ ลำตัวอย่างค้านด้วยพลังงานเท่ากัน — n เล็กๆ น้ำหนักเจตนาร้าย ถ้าสิบนาทีก่อนแล้วไม่มีฝ่ายไหนชนะ ให้สงสัยว่าเป็น DP แทน และจงพกกระสุนเตือนที่นักแข่งทุกคนเคยโดนมาแต่หัดใหม่: เหรียญ {1, 3, 4} จำนวนเงิน 6

ตะกาะ: $4 + 1 + 1$ สามเหรียญ เหมาะที่สุด: $3 + 3$ สองเหรียญ ตะกาะพร้อมบทพิสูจน์
เท่านั้น ไม่จำเป็นต้องส่ง

★★ · เลือกนัดประชุม

จากช่วง $[0,2)$, $[1,3)$, $[2,4)$, $[3,5)$, $[4,6)$ จงเลือกจำนวนช่วงมากที่สุดที่ไม่ทับซ้อนกันเป็น
คู่ๆ

หยุดก่อน คุณจะ sort ด้วยกฎแฉไหน?

เฉลย. กฎตะกาะ: หยิบช่วงที่จบเร็วที่สุดในบรรดาช่วงที่เข้ากันได้กับที่ถืออยู่ ทำซ้ำไป
เรื่อยๆ ไล่รอย: หยิบ $[0,2)$; ข้าม $[1,3)$; หยิบ $[2,4)$; ข้าม $[3,5)$; หยิบ $[4,6)$ — 3 การ

ประชุม และ 3 คือค่ามากที่สุด (ช่วงยาว 2 สี่ช่วงที่ไม่ทับกันเป็นคู่ ต้องกินความยาวรวม 8
ในพิสัยแค่ 6)

บทพิสูจน์สลับชั้นของกฎ: ให้ g_1 เป็นช่วงที่จบเร็วที่สุดในทั้งหมด และ o_1 เป็นสมาชิกที่
เริ่มเร็วที่สุดของเซตเหมาะสมที่สุด OPT ใดๆ แล้ว $\text{finish}(g_1) \leq \text{finish}(o_1)$ ดังนั้น $\text{OPT} - \{o_1\}$
+ $\{g_1\}$ ยังไม่ทับกันเป็นคู่อยู่ดี — g_1 จบไม่ช้ากว่า o_1 จึงชนกับสมาชิกที่เหลือของ OPT ไม่
ได้ — และมีขนาดเท่าเดิม จึงมีค่าตอบแทนที่สุดสักชุดที่เริ่มต้นด้วยตัวเลือกของตะกาะ;
เวียนทำต่อบนพิสัยที่เหลือ ■

ทำ — ปั่น OPT ให้กลายร่างเป็นตะกาะ. บทพิสูจน์ไม่เคยพูดว่าตะกาะชนะ OPT
มันพูดว่า OPT ถูกปั่นรูปใหม่ให้เป็นตะกาะได้ ทีละการสลับที่ไม่เสียอะไรเลย — แม้
แบบที่หยิบใช้ซ้ำได้ครึ่งวงการอัลกอริทึม

★★★★ · จำนวนที่ใหญ่ที่สุด

กำหนดจำนวนเต็มบวก — เช่น $\{9, 5, 34, 3, 30\}$ — จงเรียงพวกมันเป็นแถว ให้การนำ
หลักฐานสืบทอดกันได้จำนวนที่ใหญ่ที่สุดเท่าที่เป็นไปได้

หยุดตรงนี้ sort แบบเห็นๆ นั้นผิด จงหาตัวเปรียบเทียบที่ถูก

เฉลย. Sort ด้วยตัวเปรียบเทียบ: ให้ x มาก่อน y เมื่อผลต่อ xy มากกว่า yx (เทียบกันในฐานจำนวน) ไหล่รอย: 9 กับ 5 $\rightarrow$ "95" > "59"; 34 กับ 3 $\rightarrow$ "343" > "334" ดังนั้น 34 นำหน้า 3; 3 กับ 30 $\rightarrow$ "330" > "303" ดังนั้น 3 นำหน้า 30 ลำดับ: 9, 5, 34, 3, 30 — คำตอบ **9534330** (ขณะ ตัวอย่างเช่น 9, 5, 3, 34, 30 $\rightarrow$ 9533430)

ทำไมทำนี้จึงชอบธรรม — หนึ่งสองก่อนที่นักแก้ส่วนใหญ่จะ:

1. **ตัวเปรียบเทียบเป็นอันดับรวมของแท้** เขียน X แทนค่าของ x และ ℓ_x แทนจำนวนหลักของมัน: $xy > yx \iff X \cdot 10^{\ell_y} + Y > Y \cdot 10^{\ell_x} + X \iff X(10^{\ell_y} - 1) > Y(10^{\ell_x} - 1) \iff \frac{X}{(10^{\ell_x} - 1)} > \frac{Y}{(10^{\ell_y} - 1)}$ กฎจับคู่หน้าตาพิลึกนี้แอบเป็นการ sort ตามกฎแจกจำนวนจริงตัวเดียว $k(x) = X/(10^{\ell_x} - 1)$ — จึงถ่ายทอดได้ จึงเป็น sort ที่ใช้การได้ และ k มีค่าอ่านน่ารัก: $k(34) = 34/99 = 0.343434\dots$, $k(3) = 3/9 = 0.333\dots$ — หลักของแต่ละจำนวนวนซ้ำไปชั่ววินาที การจัดเรียงนี้ sort ตามสิ่งที่คุณจะได้กลายเป็น หากทำซ้ำตัวเองไม่รู้จบ
2. **สลับขึ้นเพื่อความเหมาะสมที่สุด** ในการจัดเรียงใดๆ ถ้ามีคู่ติดกันสักคู่วางค่านตัวเปรียบเทียบ (...yx... ทั้งที่ $xy > yx$) การสลับสองตัวนั้นเปลี่ยนแคร์รอยต่อจุดนั้น — หลักอื่นทุกหลักคงตำแหน่งเดิม — และทำให้จำนวนทั้งก่อนใหญ่ขึ้นโดยแท้ การจัดเรียงใดที่ไม่เรียงตาม sort ย่อมมีคู่ติดกันที่กลับลำดับเช่นนี้ จึงไม่เหมาะสมที่สุด; การจัดเรียงตาม sort คือค่ามากที่สุด โดยตัวที่ k เท่ากันสลับกันได้ ■

ทำ — พิสูจน์หนึ่งทั้งสองก่อน. กฎตะกอละติดหนึ่อยู่สองก่อน: ความคงเส้นคงวา (ตัวเปรียบเทียบต้องถ่ายทอดได้ — และภาษาโปรแกรมยีนดัดจะ "sort" ด้วยตัวเปรียบเทียบที่ไม่ถ่ายทอดออกมาเป็นความไร้สาระ) และเสถียรภาพต่อการสลับขึ้นจ่ายให้ครบทั้งคู่ ไม่งั้นอย่าส่งคำตอบ

เครื่องจักรกับทำนี้. โมเดลภาษาเสนอกฎตะกอละได้คล่องปาก และแต่งเรื่อง (hallucinate) ความถูกต้องของมันขึ้นมาเอง; รีเฟล็กซ์ {1, 3, 4} — โจมตีกฎของตัวเองก่อนจะเชื่อมั่น — คือนิสัยปรปักษ์ที่ต้องฝึกฝน ไม่ใช่ค่าโรงงาน

ไบนารีเสิร์ชบนคำตอบ

เครื่องมือ. จะหาค่าเหมาะที่สุดของปริมาณที่คำนวณตรงๆ ยาก ให้พลิกคำถาม: มีคำตอบที่ค่าอย่างน้อย x ไหม? ถ้าความเป็นไปได้โมโนโทนใน x — เป็นไปได้ที่ x แปลว่าเป็นไปได้ตลอดทั้งซีกหนึ่ง — ค่าเหมาะที่สุดก็คือกรณีประตู่ และไบนารีเสิร์ชหามันเจอด้วยการเรียกกระบวนการตัดสินใจเพียง $O(\log \text{พิสัย})$ ครั้ง คุณเพิ่งแลก "หาค่าเหมาะที่สุด" กับ "ตัดสินใจ" และการตัดสินใจแทบจะง่ายกว่าเสมอ: greedy สักตัว หรือเช็กกราฟสักรอบ

กลืน. คาถาวิเศษ: ทำค่ามากที่สุดให้น้อยสุด, ทำค่าน้อยสุดให้มากที่สุด — "ระยะห่างต่ำสุดที่ใหญ่ที่สุด" "เวลาน้อยที่สุดที่งานทุกชิ้นเสร็จครบ" อีกกลืน: คำตอบเป็นตัวเลขตัวเดียวในพิสัยจำกัด และการเช็กผู้สมัครนั้นง่าย แม้การผลิตตัวที่ดีที่สุดจะยาก รีเฟล็กซ์: ถามว่า "ถ้าออราเคิลกระซิบคำตอบ x มาให้ ฉันทวนสอบคำตอบที่ระดับ x ได้ถูกๆ ไหม?" ถ้าใช่และโมโนโทน — ปัญหาแก้เสร็จแล้ว เหลือแค่ขั้วรูทีนเช็กความเป็นไปได้

★★ . โรงเลื่อย

ต้นไม้สูง 20, 15, 10, 17 ใบเลื่อยตั้งที่ความสูง H จะตัดทุกอย่างที่อยู่เหนือ H เก็บไม้ได้ $\sum \max(0, h_i - H)$ หน่วย จงหาจำนวนเต็ม H ที่ใหญ่ที่สุดที่เก็บไม้ได้อย่างน้อย 7 หน่วย (โจทย์คลาสสิกจากเว็บฝึกซ้อม รู้จักกันในชื่อ EKO)

หยุดก่อน อย่าหาค่าเหมาะที่สุด เดาแล้วเช็ก — อย่างมีประสิทธิภาพ

เฉลย. ความเป็นไปได้ $f(H) = \text{"wood}(H) \geq 7\text{"}$ ปริมาณไม้ไม่เพิ่มตาม H ดังนั้น f โมโนโทน: จริงข้างล่าง เท็จข้างบน ไบนารีเสิร์ชบน $[0, 20]$:

- $H = 10$: ไม้ = $10 + 5 + 0 + 7 = 22 \geq 7 \checkmark \rightarrow$ ขยับสูงขึ้น, $[10, 20]$
- $H = 15$: ไม้ = $5 + 0 + 0 + 2 = 7 \geq 7 \checkmark \rightarrow [15, 20]$
- $H = 18$: ไม้ = $2 + 0 + 0 + 0 = 2 \times \rightarrow [15, 17]$
- $H = 16$: ไม้ = $4 + 0 + 0 + 1 = 5 \times \rightarrow [15, 15]$

คำตอบ $H = 15$ ($\text{wood}(15) = 7 \checkmark$, $\text{wood}(16) = 5 \times$) การเรียกตัดสินใจห้าครั้งแทนการกวาดทุกความสูง; ถ้าความสูงไปได้ถึง 10^9 ก็ราวสามสิบครั้ง ลอการิทึมคือโมเดลธุรกิจทั้งหมดของที่นี่ ■

ทำ — ซักถามผู้สมัคร ไม่ใช่ค่าที่เหมาะสมที่สุด. ถ้าคำตอบที่ถูกกระซิบมาจะเช็กได้ง่าย จงเลิกพยายามคำนวณมัน แล้วเริ่มผ่าครึ่งไล่หามัน

★★★★ • วัวจอมหัว

คอกอยู่ที่ตำแหน่ง 1, 2, 4, 8, 9 บนเส้นตรง จงวางวัว 3 ตัวลงคอก ให้ระยะห่างต่ำสุด ระหว่างวัวคู่ใดๆ ใหญ่ที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ (ฉบับคลาสสิกรู้จักกันในชื่อ AGGRCOW)

หยุดตรงนี้ เครื่องมือสองชิ้นกำลังจะต้องประกอบร่างกัน

เฉลย. ฉบับตัดสิน: วางวัว 3 ตัวให้ทุกคู่ห่างกันอย่างน้อย d ได้ไหม? เช็กด้วยตะกละ: วางวัวตัวแรกที่คอกซ้ายสุด แล้วหีบคอกถัดไปที่ห่างจากวัวตัวก่อนอย่างน้อย d เสมอ; นับจำนวนที่วางได้ ตัวเข็มนี้อาศัยการบัพทิสัญสลับขั้นเล็กๆ ของตัวเอง: ถ้ามีการวาง k ตัวที่ช่องไฟ d แบบใช้ได้จริงอยู่สักแบบ การเลื่อนวัวซ้ายสุดของมันไปคอกซ้ายสุด และวัวตัวถัดๆ ไป ไปยังคอกเร็วที่สุดที่ $\geq d$ เลยตัวก่อนหน้า มีแต่จะเลื่อนวัวไปทางซ้ายหรืออยู่ที่เดิม ไม่มีวันละเมิด d — การวางแบบตะกละ-ชิดซ้ายจึงนั่งวัวได้ไม่น้อยกว่าแบบไหนๆ ดังนั้น "ตะกละนั่งได้ ≥ 3 " สมมูลกับความเป็นไปได้ ความเป็นไปได้โมโนโทน — d ยิ่งใหญ่ ยิ่งยาก — จึงไบนารีเสิร์ช d บน $[1, 8]$:

- $d = 4$: วางที่ 1 $\rightarrow$ ถัดไป $\geq 5 \rightarrow 8 \rightarrow$ ถัดไป $\geq 12 \rightarrow$ ไม่มีได้วัวสองตัว $< 3 \times \rightarrow [1, 3]$
- $d = 2$: 1 $\rightarrow 4 \rightarrow 8$ วัวสามตัว $\checkmark \rightarrow [2, 3]$
- $d = 3$: 1 $\rightarrow 4 \rightarrow 8$ ช่องไฟ 3 กับ 4 วัวสามตัว $\checkmark \rightarrow [3, 3]$

คำตอบ $d = 3$ โดยแสดงแล้วว่า $d = 4$ เป็นไปไม่ได้ ■

เนื้อหาระดับ ★★★★★ อยู่ที่ตัวกรอบ: นักแก้มไม่เคยหาค่าเหมาะสมที่สุดของอะไรเลยสักอย่าง "ทำค่าน้อยสุดให้มากที่สุด" ละลายหายกลายเป็น (ก) การมองเห็นความโมโนโทน (ข) ตัวเข็มตัดสินแบบตะกละที่พบกบพทิสัญสลับขั้นของตัวเองมาด้วย (ค) การทำซ้ำแค่หลักลอการิทึมครึ่ง เครื่องมือประกอบเครื่องมือ — หมวดนี้อยู่เปลือกนอก หมวดก่อนหน้าอยู่ไส้ใน

ทำ — ละลาย "ทำค่าน้อยสุดให้มากที่สุด" ให้เป็นความเป็นไปได้. ค่าเหมาะที่สุดคือ ธรณีประตุ; จงล่าธรณีประตุ ไม่ใช่ล่าคำตอบ

เครื่องจักรกับทำนี้. กลไกล้วนๆ ทันทิที่ความโมโนโทนถูกประกาศไว้ — นี่อาจเป็นแพตเทิร์นที่พบบ่อยที่สุดในข้อมูลฝึกสายแข่งเขียนโปรแกรมของโมเดล; ขั้นตอนของมนุษย์คือการรับรองความโมโนโทนบนปัญหาหลายๆ ที่ซึ่ง "โมโนโทนชัดๆ" บางทีก็ไม่มีโมโนโทน จงพิสูจน์หนึ่งบรรทัดนั้นก่อนจะเชื่อการเสิร์ช

คดีย้อนจากปลายทาง

เครื่องมือ. เริ่มจากสถานะเป้าหมายแล้วคำนวณตัวก่อนหน้า แทนการสำรวจเดินหน้า จากจุดเริ่ม ในเกมนี้คืออุปนัยย้อนกลับ (backward induction): ป้ายตำแหน่งจบเกมว่าชนะ หรือ แพ้ แล้วแพร่ป้ายออกไป — ตำแหน่งหนึ่งเป็นฝ่ายชนะถ้ามีสักท่าเดินที่พาไปถึงตำแหน่งซึ่งแพ้สำหรับคู่ต่อสู้ เป็นฝ่ายแพ้ถ้าทุกท่าเดินพาไปถึงตำแหน่งชนะทั้งหมด ในปริศนามันคือ "ก้าวสุดท้ายจำเป็นต้องเป็นอะไร?" — ก้าวสุดท้ายมักถูกบีบรัดยิ่งกว่าก้าวแรกมาก ต้นไม้จากปลายด้านนั้นจึงพอมองว่า

กลืน. เป้าหมายระบุชัดแต่จุดเริ่มพรมัว: "ไปให้ถึง 100 พอดี" "จบด้วยโทเคนหนึ่งอัน" "รุกฆาตในสามตา" เกมข้อมูลสมบูรณ์ — "เล่นดีที่สุดแล้วใครชนะ?" ท่าเดินที่กลับทิศได้ ง่ายกว่าเลือกเดินหน้า รีเฟล็กซ์: เมื่อการแตกกิ่งไปข้างหน้ากว้างแต่เป้าหมายแคบ จงปลุกต้นไม้จากปลายด้านแคบ — หรือจากทั้งสองปลายพร้อมกัน หันเลขชี้กำลังลงครึ่งหนึ่ง

★★ · วิ่งสู่ 100

สองโจทย์คลาสสิก โครงกระดูกเดียวกัน (ก) หิน 21 ก้อน; ผู้เล่นผลัดกันหยิบ 1, 2 หรือ 3 ก้อน; ใครหยิบก้อนสุดท้ายชนะ (ข) ผู้เล่นผลัดกันบวก 1 ถึง 10 เข้ายอดรวมที่เริ่มจาก 0; ใครพูด 100 ชนะ ใครชนะในแต่ละเกม และชนะอย่างไร?

หยุดก่อน เริ่มจากตอนจบ — ตามตัวอักษรเลย

เฉลย. (ก) ป้ายย้อนกลับ เฉยหิน 0 ก้อนคือคุณแพ้ไปแล้ว — ผู้เล่นก่อนหน้าหยิบก้อนสุดท้ายไป เฉยหิน 1–3 คุณชนะ (หยิบหมดก้ามือ) เฉยหิน 4 ทุกท่าเดินยื่นชัยชนะให้คู่ต่อสู้:

4 คือฝ่ายแพ้ แพ้ฝ่ายต่อไป ตำแหน่งแพ้คือพหุคูณของ 4 พอดิบพอดี — จาก $4k$ การหยิบ t ใดๆ เหลือจำนวนที่ไม่ใช่พหุคูณ; จาก $4k + r$ ($r = 1, 2, 3$) จงหยิบ r เนื่องจาก $21 \equiv 1 \pmod{4}$ ผู้เล่นคนแรกชนะ: หยิบ 1 แล้วตอบทุก t ด้วย $4 - t$ คินสภาพพหุคูณของ 4 เสมอ (ข) เครื่องยนต์เดียวกัน ฉบับบวกเลข: เป้าที่ต้องยื่นให้คู่ต่อสู้ไต่ย้อนจาก 100 ที่ละ $11 - 100, 89, 78, \dots, 12, 1$ — เพราะ k ของคู่ต่อสู้ถูกตอบด้วย $11 - k$ ของคุณ ผู้เล่นคนแรกพูด 1 แล้วไต่ $12, 23, \dots, 89, 100$ ■

เล่นเดินหน้าที่ 21 เห็นต้นไม้พุ่มหนาที่บ; การย้ายย้อนกลับให้ทฤษฎีทั้งหมดออกมาเป็นลำดับเลขคณิตเดียว มันยังปลุกมโนทัศน์ทั่วไปไว้ด้วย — ตำแหน่งเย็น (แพ้สำหรับผู้ถึงตาเดิน) ปะทะตำแหน่งร้อน — โครงกระดูกเป็นคาบที่รองรับทฤษฎีเกมตระกูล Nim: คอลัมน์สมมูลของบทที่ 9 ก็คือตำแหน่งเย็นของ Nim เป๊ะๆ และทฤษฎีฉบับทั่วไป (Sprague–Grundy) ก็ออกจากเมล็ดนี้

ทำ — ป้ายจากตอนจบ. เป้าหมายคือสถานะเดียว จุดเริ่มมีนับไม่ถ้วน จงคำนวณชนะ/แพ้ กระจายออกจากเป้าหมาย แล้วอ่านคำตอบออกจากตารางของคุณเอง

★★★★ · เกมของ Wythoff กับอัตราส่วนทอง

กองหินสองกอง ทำเดิน: หยิบจำนวนบวกเท่าใดก็ได้จากกองเดียว **หรือ** หยิบจำนวนบวกเท่ากันจากทั้งสองกอง หินก้อนสุดท้ายเป็นของผู้ชนะ จงบรรยายลักษณะตำแหน่งแพ้ทั้งหมด

หยุดตรงนี้ บดกรณีเล็กๆ ก่อนจะตั้งทฤษฎี

เฉลย. ย้ายย้อนกลับสถานะเล็กๆ นับคู่แบบไม่จัดอันดับ $(0,0)$ คือแพ้ — ผู้ถึงตาเดินเผชิญความว่างเปล่า ผู้เล่นก่อนหน้าหยิบก้อนสุดท้ายไปแล้ว ทุกอย่างไปถึง $(0,0)$ ได้ในหนึ่งท่า — ทุก $(k,0)$ และ $(0,k)$ — คือชนะ กวาดขึ้นไปหาสถานะถัดไปที่ทางออกทุกทางเป็นชนะ: $(1,2)$ ทำเดินของมันไปถึง $(0,2), (1,1), (1,0)$ และทางทแยง $(0,1)$ — แต่ละตัวชนะ (แต่ละตัวถึง $(0,0)$ ได้ในหนึ่งท่า) ดังนั้น $(1,2)$ แพ้ ตัดทุกอย่างไปถึง $(0,0)$ หรือ $(1,2)$ ได้ทั้งไป ผู้สมัครถัดไปคือ $(3,5)$ ทำกองเดียวของมันไปถึง $(0,5), (1,5), (2,5), (3,4), (3,3), (3,2), (3,1), (3,0)$; ทำทแยงไปถึง $(2,4), (1,3), (0,2)$ ทุกตัวชนะหมด: $(0,5), (3,0),$

(0,2) และ (0,0) ได้ตรงๆ และ (3,3) และได้ทางทแยง; (1,5) → (1,2) โดยหยิบ 3; (2,5) → (2,1) โดยหยิบ 4; (3,2) → (1,2) โดยหยิบ 2; (1,3) → (1,2) โดยหยิบ 1; (3,1) → (2,1) โดยหยิบ 1; (3,4) → (1,2) ด้วยทแยง -2; (2,4) → (2,1) โดยหยิบ 3 (คู่มือจัดอันดับ: (2,1) ก็คือ (1,2)) ดังนั้น (3,5) แพ้ ตะแกรงร้อนต่อไป: (0,0), (1,2), (3,5), (4,7), (6,10), (8,13), ...

ข้อเท็จจริงเชิงโครงสร้างสองข้อร่วงออกมาจากตาราง: จำนวนเต็มบวกทุกตัวปรากฏในคู่ แพ้เพียงคู่เดียวพอดี และคู่ตัวที่ k ต่างกัน k พอดี รูปปิด (Wythoff, 1907): ตำแหน่งแพ้ ตัวที่ k คือ $([k\phi], [k\phi^2])$ โดย $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ ตรวจ — $k = 1: (1, 2); k = 2: ([3.236], [5.236]) = (3, 5); k = 3: ([4.854], [7.854]) = (4, 7) \checkmark$ ทำไมต้องอัตราส่วนทอง: ทฤษฎีบทของ Beatty กล่าวว่าลำดับ $[k\alpha]$ กับ $[k\beta]$ แบ่งกันเซตจำนวนเต็มบวกพอดี ก็ต่อเมื่อ $1/\alpha + 1/\beta = 1$ — และ $1/\phi + 1/\phi^2 = 1$; ขณะที่ $\phi^2 = \phi + 1$ ทำให้ช่องว่างของคู่ ตัวที่ k เท่ากับ k พอดี สมบัติสองข้อนี้คือกฎของตะแกรงเป๊ะๆ: คู่แพ้นี้ใหม่แต่ละคู่ใช้จำนวนเต็มตัวเล็กสุดที่ยังไม่ถูกใช้ (สมบัติการแบ่งกัน) พร้อมช่องว่าง k (สมบัติทำทแยง)

■

การวิเคราะห์ถอยหลัง (retrograde analysis) คือการทดลอง; อัตราส่วนทองคือทฤษฎีเวิร์กโฟลว์ที่เชื่อถือ — บดตารางย้อนกลับ จ้องมอง ตั้งข้อคาดการณ์ แล้วพิสูจน์ผ่าน Beatty — คือวิธีที่ผลลัพธ์นี้ถูกค้นพบจริงๆ ในประวัติศาสตร์ และมันจำลองเครื่องยนต์สองจังหวะที่หนังสือเล่มนี้พบเจอซ้ำแล้วซ้ำเล่า: เครื่องจักรผลิตข้อมูล; การจดจำบีบอัดมัน; บทพิสูจน์รับรองมัน

ทำ — บดตารางก่อน แล้วค่อยคู่ควรกับสูตร. อุปนัยย้อนกลับให้ความจริงโดยไม่การปึง; การบีบอัดตารางให้เป็นรูปปิดคือการปึง — และจากนั้นมันต้องถูกพิสูจน์ ไม่ใช่จับแพดเทิร์นเอาเฉยๆ

เครื่องจักรกับทำนี้. การวิเคราะห์ถอยหลังคือสนามเหย้าของเครื่องจักร — ตารางจบเกมหมากรุก (endgame tablebase) ที่ทุกตำแหน่งซึ่งเหลือหมากเจ็ดตัวหรือน้อยกว่าถูกแก้ย้อนหลังจนหมด คืออนุสาวรีย์อุตสาหกรรมของมัน; จังหวะของมนุษย์คือการบีบตารางให้เหลือ ϕ ซึ่งไม่มี tablebase ตัวไหนจะอาสาบอกให้เด็ดขาด

ห้าทำในปริบทเดียว

ทำ	กลืน	ตราประจำทำ
เสริมแรงสมมุติฐาน	ชั้นอุปนัยเกือบจะทำงาน	เบาะ $2 - 1/n$
บีบอัดประวัติศาสตร์เป็นสถานะ	นับ/หาค่าเหมาะที่สุดบนลำดับ; อดีตที่เกี่ยวข้องมีขนาดเล็ก	12 ของ knapsack ชนะ 11 ของตะกละ
การพิสูจน์แบบสลับขึ้น	sort ตามกฎแจ็กตัวฟังดูมีเค้า	9534330
ไบนารีเสิร์ชบนคำตอบ	หาค่ามากที่สุดให้น้อยสุด	วัวที่ $d = 3$
ป้ายจากตอนจบ	เป้าหมายแคบ จุดเริ่มพรวดว	φ ของ Wythoff

ทั้งห้าคือนักสร้าง: แต่ละทำคืนให้ไม่ใช่แค่คำตอบ แต่คือสิ่งก่อสร้างพร้อมใบรับประกัน เหลืออีกหนึ่งตระกูล — เครื่องมือที่เปลี่ยนว่าปัญหาคืออะไร ก่อนที่ใครจะเริ่มลงมือแก้

บทที่ 11

สายตานักจำลองแบบ

ตระกูลสุดท้ายไม่โจมตีปัญหา; มันเปลี่ยนว่าปัญหาคืออะไร การแทนเสียใหม่ (re-representation) — เรื่องเล่ากลายเป็นกราฟ ผลบวกกลายเป็นเซต ปริศนากลายเป็นคำเฉลี่ย — คือทำให้เรียบที่สุดในคลังแสงและทรงพลังที่สุด: หลังการแปลที่ถูกต้อง ปัญหาที่ลือชื่อยากก็แก้ตัวเองจนจบ และนี่ยังเป็นสนามที่นักแก่นุชย์ถือแต่ม้นำเครื่องจักรกว้างที่สุดด้วย บทนี้ปิดท้ายด้วยฉากใหญ่เลื่องชื่อสามฉาก เล่าพร้อมชำระประวัติให้ตรงตามจริง

เรื่องเล่า → โครงสร้าง

เครื่องมือ. หล่อปัญหาขึ้นรูปใหม่ให้เป็นอินสแตนซ์ของนามธรรมที่รู้จักและแก้ไว้แล้ว: กราฟ โครงข่ายการไหล การจับคู่ วิธีสั้นสุด ระบบสมภาค การแก้ไขทฤษฎีคือการแปลภาษา — บอกให้ได้ว่าจุดยอดคืออะไร เส้นเชื่อมคืออะไร และทฤษฎีบทคลาสสิกข้อไหนใช้ได้ แล้ว ณ บัดนี้ การเขียนโปรแกรมแข่งขันระดับยอดคือกีฬาแห่งการจดจำการลดรูป (reduction); ปัญหายากส่วนใหญ่คือแก่นที่รู้จักกันดี สวมชุดแฟนซีมา

กลั่น. เอนทิตีที่มีความสัมพันธ์เป็นคู่ๆ: กราฟกำลังมา "จัด X ให้ Y" ได้เงื่อนไขความเข้ากันได้: การจับคู่สองฝั่ง (bipartite matching) "ปริมาณผ่านทาง" "คอขวด" "ตัดขาดพวกมัน": max-flow, min-cut สถานะต่อเนื่องพร้อมทรานซิชันที่ถูกกติกา: วิธีสั้นสุด บนปริภูมิสถานะ ไม่ใช่บนพื้นที่กายภาพ สัญญาณเมตา: เรื่องเล่าด้านการโจมตีซึ่งหน้า แต่ทุกประโยคฟังเหมือนกำลังบรรยายโครงสร้างอะไรสักอย่าง รีเฟล็กซ์: **ตั้งชื่อจุดยอด**

ปริศนาแรกสุดของหนังสือเล่มนี้แอบเป็นตัวอย่างง่ายของหมวดนี้มาตลอด หมาป่า แพะ กะหล่ำปลี ของบทที่ 1 กลายเป็น: จุดยอด = การกระจายตัวที่ถูกกติกาของ {ขานา, หมาป่า, แพะ, กะหล่ำปลี} บนสองฝั่งน้ำ — สถานะดิบ 16 ถูกกติกา 10; เส้นเชื่อม = การข้ามฟากหนึ่งเที่ยว คำถามกลายเป็นวิธีสั้นสุด; breadth-first search หาเส้นทาง 7 เทียวข้ามเจอ แกรมรับรองว่าน้อยสุด — และอาช้ยอันลือลั่น การพาแพะย้อนกลับ ก็กลายเป็นแค่เส้นเชื่อมธรรมดาเส้นหนึ่ง ถูกข้ามผ่านโดยการเสิร์ชโง่ๆ ตัวเดียวกัน การปึงอยู่ที่ขึ้น

จำลองแบบ; หลังจากนั้นไม่ต้องใช้การปิ้งอีกเลย ทำเดียวกันนี้แก้ลูกบาศก์ Rubik ปริศนา
เลื่อนแผ่น และการทวนสอบโปรโตคอล: วิธีสิ้นสุดในกราฟของคอนฟิгурเรนซ์ ไม่ใช่ของ
สถานที่

★★★★ · ยามในวัง

พื้นวังขนาด 4×4 มีสมบัติอยู่ที่ช่อง (1,1), (1,3), (2,2), (3,1), (3,3) — แฉว, คอลัมน์
ยามหนึ่งคนลาดตระเวนเต็มหนึ่งแถวหรือเต็มหนึ่งคอลัมน์ จงหาจำนวนยามน้อยที่สุดที่
คุ้มกันสมบัติได้ครบทุกชิ้น และพิสูจน์ว่าน้อยที่สุดจริง

หยุดตรงนี้ อะไรกันแน่คือจุดยอด?

เฉลย. ไปทางสองฝั่ง: จุดยอดฝั่งซ้ายคือแฉว จุดยอดฝั่งขวาคือคอลัมน์ และ**สมบัติแต่ละ
ชิ้นคือเส้นเชื่อม**ที่โยงแฉวของมันเข้ากับคอลัมน์ของมัน ยามคือจุดยอด; การคุ้มกันสมบัติ
ครบทุกชิ้นคือการแตะทุกเส้นเชื่อม: **vertex cover** ในกราฟสองฝั่ง vertex cover น้อย
สุดเท่ากับ matching มากสุด — ทฤษฎีบทของ König, 1931 ขอบเขตล่าง: สมบัติ (1,1),
(2,2), (3,3) เป็น matching ขนาด 3 ไม่ใช่แฉวร่วมกัน ไม่ใช่คอลัมน์ร่วมกัน และยามหนึ่ง
คนคุ้มเส้นเชื่อมของ matching ได้อย่างมากหนึ่งเส้น — 3 คนจึงถูกบังคับ ขอบเขตบน:
แฉว 1, 2, 3 คุ้มสมบัติครบทั้งห้า น้อยสุด: **3** ■ (ตรวจจริงๆ ว่าสองคนไม่พอ: จะคุ้ม (2,2)
ต้องใช้แฉว 2 หรือคอลัมน์ 2 ซึ่งไม่แตะสมบัติมุมทั้งสี่ชิ้นเลย — และเส้นเดียวคุ้มสี่ชิ้นมุม
นั้นได้อย่างมากสอง)

ไม่มีตรงไหนในเรื่องเล่าพูดคำว่า "กราฟ" และการแปลที่ชนะ — สมบัติ = เส้นเชื่อม ไม่ใช่
จุดยอด — คือเนื้อแท้ของทักษะการจำลองแบบล้วนๆ พอแปลเสร็จ ทฤษฎีบทปี 1931 ก็
ปิดฉากการต่อสู้ให้ พร้อมใบรับรองแนบมา: ตัว matching นั้นแหละคือพยานของ
ขอบเขตล่าง

ทำ — ตั้งชื่อจุดยอด. เลือกอะตอมให้ถูก แล้วทฤษฎีบทก็รออยู่ตรงนั้นแล้ว

เครื่องจักรกับท่านี. การรัน max-flow นั้นจีบจี้อย; การตัดสินใจว่าเรื่องเล่านี้เป็นปัญหาการ
ไหลคือ abduction บนปริภูมิการแทนแบบเปิด — โมเดลจำชุดแพนซีที่เคยอ่านผ่านตาได้
แต่พลาดท่ากับการปลอมตัวสดใหม่

แยกกรณี กับ WLOG

เครื่องมือ. เมื่อไม่มีอาร์กิวเมนต์เดียวที่คลุมได้ทั้งหมด จงแบ่งปริภูมิเป็นกรณีจำนวนจำกัดแล้วสังหารทีละกรณี วินัย: ครบถ้วน (บอกให้ได้ว่าทำไม) ควรไม่ทับซ้อนกัน และน้อยกรณี — ตรงนี้แหละที่ "without loss of generality (WLOG — โดยไม่เสียมันไป)" หาเลี้ยงชีพ: หารสมมาตรที่ก่อนจะแยกกรณี ด้วยการตรึงลำดับ ตรึงตำแหน่ง หรือตรึงการตั้งชื่อ

กลืน. ปริภูมิเล็กและมีโครงสร้าง — สองสี เศษเหลือ mod 3 ใครเดินก่อน ข้อความที่ไม่แปรเปลี่ยนได้การสลับป้ายชื่อ: ความไม่แปรเปลี่ยนนั้นคือคูปอง จงใช้มัน กลืนเตือนในทิศตรงข้าม: จำนวนกรณีที่ทะลุหาไปแล้วโดยประมาณ มักแปลว่าขนาด invariant หรือขาดการเลือกตัวสุดชั่วสักตัว การแยกกรณีคือทางเลือกสุดท้ายอันมีเกียรติ

★★ · ปาร์ตี้หกคน

จงพิสูจน์ว่าในคน 6 คนใดๆ มีสัก 3 คนที่รู้จักกันหมด หรือสัก 3 คนที่แปลกหน้ากันหมด หยุคก่อน ตรึงแขกหนึ่งคน แล้วมองความสัมพันธ์ทั้งห้าเส้นของเขา

เฉลย. ตรึงคนหนึ่งคน เรียก v ในความสัมพันธ์ 5 เส้นที่ v ต้องมีชนิดหนึ่งปรากฏอย่างน้อย $\lceil 5/2 \rceil = 3$ ครั้ง (หลักรังนกพิราบ); **WLOG** ให้เป็น "รู้จัก" — ตัวข้อความสมมาตรได้ การสลับ รู้จัก/แปลกหน้า ทำนี้จึงหันบทพิสูจน์เหลือครั้งเดียว สมมุติ v รู้จัก A, B, C ถ้ามีคู่ไหนในสามคนนี้รู้จักกัน คู่้นับวก v คือสามเหลี่ยมคนรู้จัก ถ้าไม่มีคู่ไหนเลย A, B, C ก็คือสามคนแปลกหน้ากันหมด จบทั้งสองทาง ■ ความคม: จับคน 5 คนนั่งเป็นรูปห้าเหลี่ยมเพื่อนบ้านรู้จักกัน เส้นทแยงแปลกหน้ากัน — ไม่มีสามเหลี่ยมชนิดใดเลย ดังนั้น 6 คือค่าเป๊ะ: $R(3,3) = 6$

เครื่องมือสามชิ้นในแปดบรรทัด — รังนกพิราบเลือกกิจ WLOG หันต้นไม้เหลือครึ่ง excluded middle ทำให้กรณีครบถ้วน แล้วคำขวัญของทฤษฎี Ramsey ก็ตามมา: โครงสร้างกลายเป็นสิ่งเลี่ยงไม่ได้เมื่อขนาดถึง

ทำ — หารสมมาตรที่ก่อนจะแยกกรณี. สมมาตรทุกอันที่คุณไม่ยอมใช้ จะกลายเป็นกรณีที่เหมือนกันเป๊ะสองกรณี ที่ถูกเขียนซ้ำสองรอบ

★★★★ · สามจากห้า

จงพิสูจน์ว่าในจำนวนเต็ม 5 ตัวใดๆ มีสัก 3 ตัวที่ผลบวกหารด้วย 3 ลงตัว — และจงแสดงว่า 4 ตัวนั้นไม่พอ

หยุดตรงนี้ เลือกวิธีแยกกรณีให้แต่ละกิ่งมีอาวุธประจำมือ

เฉลย. ที่สำคัญมีแค่เศษเหลือ mod 3; คัดห้าตัวเข้าชั้น R_0, R_1, R_2 แล้วแยกกรณีตามขนาดชั้นที่ใหญ่ที่สุด **กรณี A** — มีชั้นหนึ่ง ≥ 3 . หยิบสามตัวจากชั้นนั้น: ผลบวก $\equiv 3r \equiv 0 \pmod{3}$ **กรณี B** — ทุกชั้น ≤ 2 . ห้าจำนวนจึงบังคับขนาดเป็น (2, 2, 1) ในลำดับใดลำดับหนึ่ง — โดยเฉพาะอย่างยิ่งไม่มีชั้นไหนว่าง เพราะสองชั้นจุได้อย่างมาก 4 หยิบชั้นละหนึ่งตัว: $0 + 1 + 2 \equiv 0 \pmod{3}$ กรณีครบถ้วนแน่: ค่าสูงสุดถ้าไม่ ≥ 3 ก็ต้อง ≤ 2 ■

ความคม. สี่จำนวนหลบได้: เศษเหลือ $\{0, 0, 1, 1\}$ — สามตัวใดๆ บวกกันได้ 1 หรือ 2 $\pmod{3}$ ไม่มีวันเป็น 0 ดังนั้น 5 คือค่าเป๊ะ นี่คือการ $n = 3$ ของทฤษฎีบท Erdős–Ginzburg–Ziv (1961): ในจำนวนเต็ม $2n - 1$ ตัวใดๆ มีสัก n ตัวที่ผลบวกหารด้วย n ลงตัว และ $2n - 2$ ตัวไม่มีวันพอ — ศูนย์จำนวน $n - 1$ ตัวกับหนึ่งจำนวน $n - 1$ ตัวคือทำหลบฉบับทั่วไป ป้ายบอกทาง "ความเป๊ะประหลาด" ของบทที่ 8 ระเบิดตรงตามนัด

ทำ — ออกแบบกรณีย้อนจากทำปิดเกม. แยกตามตัวแปรที่เลือกมาให้ทุกกิ่งตายด้วยอาวุธที่มีในมือ; การวิเคราะห์ที่โชว์ความคม (tightness) ไม่ได้ มักชุกกรณีหย่อนไว้ที่ไหนสักแห่ง

เครื่องจักรกับท่าน. การเช็คแบบถ้วนทั่วคือท่วงก้าวโดยกำเนิดของเครื่องจักร — บทพิสูจน์สี่สี่ของ Appel กับ Haken (1976) เซ็กราว 1,936 คอนฟิกูเรชัน — แต่ใบนุญาต WLOG การมองออกว่าผลหารตัวไหนยุบ 3^6 กรณีให้เหลือ 2 ยังเป็นงานออกแบบของมนุษย์

แก๊จไทยเล็กก่อน

เครื่องมือ. สองทิศทางบนหน้าปัดเดียว กรณีเล็กก่อน: คำนวน $n = 1, 2, 3, 4$ ด้วยมือ ตั้งข้อคาดการณ์แพตเทิร์น แล้วพิสูจน์มัน — กรณีที่คำนวณไว้กลายเป็นฐานของอุปนัย วางนัยทั่วไปก่อน — ปฏิเสธศรัณนักประดิษฐ์ของ Pólya อีกครั้ง: แทนที่คำถามเฉพาะเจาะจง

(100, เลขปี่นี้, กระดานแผ่นนี้) ด้วยครอบครัวพารามิเตอร์ของมัน; คำถามฉบับทั่วไปมีโครงสร้างให้จับมากกว่า และคำตอบเฉพาะก็วิ่งออกมาเองด้วยการแทนค่า

กลืน. ค่าคงตัวใหญ่เจาะจง — 2026, 100, 10^{18} — แทบทุกครั้งคือชุดแผนซีที่คลุมพารามิเตอร์สะอาดๆ ตัวหนึ่งชื่อ n "จงหาค่า" โดยไม่มีโครงสร้างให้เห็น: ทำตารางทันทีข้อความที่ให้ความรู้สึกตามอำเภอใจ: วางนัยทั่วไปจนกว่ามันจะรู้สึกหลีกเลี่ยงไม่ได้ และรีเฟล็กซ์ของมืออาชีพ: แพตเทิร์นจากข้อมูลสามจุดคือสมมุติฐาน ไม่ใช่คำตอบ

★★ · หลักสุดท้ายของ 7²⁰²⁶

จงหาหลักสุดท้ายของ 7²⁰²⁶

หยุดก่อน แทน 2026 ด้วย n แล้วทำตารางเล็กๆ

เฉลย. ทำตาราง $7^n \bmod 10$: 7, 9, 3, 1 แล้วก็ 7, 9, 3, 1, ... — คาบ 4 (เศษเหลือซ้ำเมื่อไร ทั้งวงจรถ้องซ้ำตาม: การคูณด้วย 7 mod 10 เป็นแมปตายตัว) คำตอบจึงขึ้นกับ $n \bmod 4$ เท่านั้น และ $2026 \equiv 2 \pmod{4}$: หลักสุดท้าย = $7^2 \bmod 10 = 9$ ■ เบื้องหลังของเล่นชิ้นนี้คือเครื่องจักรทั่วไป: กำลังต่างๆ mod m เป็นคาบในที่สุดเสมอ — รังนกพิราบบนเศษเหลือ m ตัว — และทฤษฎีบทของ Euler ทำนายว่าคาบต้องหาร $\phi(10) = 4$ ลงตัว

ทำ — แทนปีด้วย n . ความเป็นคาบสองบรรทัด ในชุดแผนซีสี่หลัก จงถอดชุดมันออก

★★★★ · วงกลมปะทะเสียงไซเรน

วงกลม n วงบนระนาบ แต่ละคู่ตัดกันที่ 2 จุดพอดี ไม่มีสามวงผ่านจุดเดียวกัน พวกมันหันระนาบออกเป็นกี่บริเวณ? จงคำนวณกรณีเล็ก ตั้งข้อคาดการณ์ — แล้วพิสูจน์

หยุดตรงนี้ และอย่าเชื่อสูตรแรกของตัวเอง

เฉลย. กรณีเล็ก: $n = 1 \rightarrow 2$ บริเวณ; $n = 2 \rightarrow 4$; $n = 3 \rightarrow 8$ ไซเรนซับซ้อน: 2^n ทดสอบ $n = 4$ วงกลมวงที่สี่ตัดอีก 3 วงก่อนหน้าที 6 จุด ถูกหั่นเป็น 6 ส่วนโค้ง และแต่ละส่วนโค้งผ่า

หนึ่งบริเวณ: $8 + 6 = 14$ ไม่ใช่ 16 การเบิ้ลสองเท่าคือภาพลวงตาของจำนวนเล็ก การนับแบบสะสมทีละวง คราวนี้ชื่อตรง: วงกลมวงที่ k ตัดวงก่อนหน้าทั้ง $k - 1$ วงที่ $2(k - 1)$ จุด ถูกนับเป็น $2(k - 1)$ ส่วนโค้ง และแต่ละส่วนโค้งผ่าบริเวณเดิมหนึ่งบริเวณพอดี — เพิ่ม $2(k - 1)$ ขณะที่วงแรกเพิ่ม 1 จากค่าตั้งต้น 1 $R(n) = 2 + \sum_{k=2}^n 2(k - 1) = n^2 - n + 2$ ตรวจ: 2, 4, 8, 14, 22 ✓ แล้วรับรองอย่างเป็นทางการด้วยสูตรของ Euler $V - E + F = 2$: $V = n(n - 1)$ จุดตัด; แต่ละวงแบกจุดตัดไว้ $2(n - 1)$ จุด ดังนั้น $E = 2n(n - 1)$ ส่วนโค้ง; $F = 2 - V + E = n(n - 1) + 2$ — ได้ $n^2 - n + 2$ ตัวเดิม ■ สองถนอ นึงคำตอบ: มาตรฐานที่แท้จริงของคำว่า "ทวนสอบแล้ว"

วางแผนเตือนใจไว้เคียงกัน — ปัญหาวงกลมของ Moser: n จุดบนวงกลม ลากคอร์ดครบทุกเส้น ไม่มีสามเส้นร่วมจุดเดียว นับบริเวณ ลำดับว้าง 1, 2, 4, 8, 16 — แล้วก็ 31 ที่ $n = 6$ สูตรจริงคือ $C(n, 4) + C(n, 2) + 1$ (คอร์ดแต่ละเส้นเพิ่มหนึ่งบริเวณ; จุดตัดภายในแต่ละจุด — หนึ่งจุดต่อทุก 4 จุดบนวง — เพิ่มอีกหนึ่ง): 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57 — ลำดับ A000127 ใน OEIS เบิ้ลสองเท่าห้าครั้งติดกัน แล้วก็ทรยศ กรณีเล็กมีหน้าที่เสนอ; บทพิสูจน์เท่านั้นที่ชี้ขาด

ท่า — คาดการณ์ให้ถูกๆ ทวนสอบให้แพงๆ รับรองสองชั้น. กรณีเล็กตัวที่สี่คือเบี้ยประกันราคาถูก; การหาที่มาอีกเส้นทางที่เป็นอิสระคือตราประทับ

เครื่องจักรกับท่าน. เครื่องจักรแจกแจ่งเก่งกว่าเราชนิดไร้สาระ — นักแข่งคำนวณสี่พจน์แล้วเปิด OEIS กันจริงๆ — แต่การลากเส้นต่อเป็น 2^n จากสี่พจน์คือกับดักของ Moser ฉบับอุตสาหกรรม; คาดการณ์-แล้ว-รับรอง ถ่ายโอนไปใช้ตรวจสอบเอาต์พุตของเครื่องจักรได้คำตอบ

นับสองทาง

เครื่องมือ. นับวัตถุชุดเดียวด้วยระบบทำบัญชีสองแบบ; ทั้งสองแบบนับสิ่งเดียวกัน สองนิพจน์จึงเท่ากัน — และสมการนั้นแหละคือทฤษฎีบท วัตถุที่ใช้บ่อยคือเซตของอุบัติการณ์ (incidence): ผลรวมรายแถวปะทะผลรวมรายคอลัมน์ของเมทริกซ์ 0/1 ตัวเดียวกัน นับสองทางคือโรงตีเหล็กแห่งเอกลักษณ์ของคอมบินาทอริกส์

กลืน. เอกลักษณ์หรือการหารลงตัวระหว่างปริมาณเชิงนับ; ผลบวกที่จะง่ายลงถ้าจัดดัชนีใหม่ — "สำหรับนักเรียนแต่ละคน..." ปะทะ "สำหรับโจทย์แต่ละข้อ..."; การจับมือ สมาชิกภาพ ค่าเฉลี่ย (ค่าเฉลี่ยคือการนับสองทางหารด้วยจำนวนหัว) รีเฟล็กซ์: นิยามเซตอุปติการณให้ชัดเจน — "คู่ (x, y) ที่ซึ่ง..." — แล้วรวมยอดมันทั้งสองทาง

★★ · การจับมือ กับสามะโน

(ก) จงพิสูจน์ว่าในกราฟใดๆ ผลรวมของดีกรีเท่ากับสองเท่าของจำนวนเส้นเชื่อม และสรุปว่าจำนวนจุดยอดดีกรีคี่เป็นจำนวนคู่เสมอ (ข) ในห้องเรียนหนึ่ง นักเรียน 35 คน แต่ละคนแก้โจทย์ได้คนละ 3 ข้อพอดี และโจทย์ทุกข้อถูกแก้โดยนักเรียน 5 คนพอดี มีโจทย์ทั้งหมดกี่ข้อ?

หยุดก่อน ทั้งสองข้อคือทำเดียวกัน

เฉลย. (ก) นับอุปติการณ (v, e) ที่จุดยอด v เป็นปลายของเส้นเชื่อม e : จัดกลุ่มตามจุดยอด ได้ $\sum \deg(v)$; จัดกลุ่มตามเส้นเชื่อม ได้เส้นละ 2 พอดี ดังนั้น $\sum \deg(v) = 2|E|$ — และผลบวกของจำนวนเต็มทีลงเอยเป็นคู่ ต้องมีพจน์คี่อยู่เป็นจำนวนคู่ตัว จุดยอดดีกรีคี่จึงมาเป็นจำนวนคู่เสมอ (ข) นับอุปติการณ (นักเรียน, โจทย์) สองทาง: $35 \cdot 3 = P \cdot 5$ ดังนั้น $P = 21$ ■ ไม่ต้องแจกแจง ไม่ต้องรู้โครงสร้าง — สองมุมมองเพียงลำพังก็ตรึงคำตอบได้อยู่หมัด

ทำ — รวมยอดเมทริกซ์ทั้งสองทาง. จะรายแถวหรือรายคอลัมน์ ยอดรวมใหญ่ไม่มีทางแคร์ จงทำให้ความไม่แคร์นั้นพูดอะไรออกมาสักอย่าง

★★★★ · จุดตรึงทุกจุด นับจากด้านข้าง

(IMO 1987 ข้อ 1) ให้ $p_n(k)$ เป็นจำนวนการเรียงสับเปลี่ยนของ $\{1, \dots, n\}$ ที่มีจุดตรึง k จุดพอดี จงพิสูจน์ว่า $\sum_{k=0}^n k \cdot p_n(k) = n!$

หยุดตรงนี้ เซตหนึ่งเดียวเซตไหน ที่ทั้งสองข้างอาจกำลังนับอยู่?

เฉลย. ข้างซ้ายนับการเรียงสับเปลี่ยน π แต่ละตัว หนึ่งครั้งต่อจุดตรึงหนึ่งจุดที่มีมันมี: มันคือขนาดของเซตอันดับการเรียง $F = \{(\pi, i) : \pi(i) = i\}$ เมื่อจัดกลุ่มตาม π จัดกลุ่มตาม i แทนสิ: การเรียงสับเปลี่ยนที่ตรึง i ตัวที่กำหนด ก็คือการเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิกอีก $n - 1$ ตัวนั่นเอง — มี $(n - 1)!$ ตัว ดังนั้น $|F| = n \cdot (n - 1)! = n!$ ■ เช็กสถิติที่ $n = 3$: การเรียงสับเปลี่ยนหนึ่งตัวมีจุดตรึง 3 จุด สามตัวมี 1 สองตัวมี 0; $3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 = 6 = 3!$ ✓

โจทย์ IMO แท้ๆ — และคำเฉลยทั้งหมดคือการเปลี่ยนมุมมองครั้งเดียว ยาวสามบรรทัด ความยากกับความยาวของคำเฉลยที่ดีที่สุดแทบเป็นตัวแปรอิสระต่อกัน; ข้อสอบข้อนี้ทดสอบว่าผลบวกตัวนั้นได้กลั่นกรองการนับอันดับการเรียงหรือเปล่า อ่านในเชิงความน่าจะเป็นเอกลักษณ์นี้บอกว่าการเรียงสับเปลี่ยนโดยเฉลี่ยมีจุดตรึงหนึ่งจุดพอดี — ซึ่งส่งเครื่องมือถัดไปมาใส่มือเรา

ทำ — ทุกผลบวกคือเซตหนึ่งที่กำลังถูกนับ จงหาเซตนั้นให้เจอ.

เครื่องจักรกับทำนี้. การทวนสอบว่าสองยอดตรงกันคือเลขคณิต; การเลือกเซตอันดับการเรียงคือการแทนเสียใหม่ ซึ่งวางนัยทั่วไปได้แย่ในโมเดล เมื่อเจอผลบวกถ่วงน้ำหนักที่แปลกใหม่

เลนส์ความน่าจะเป็น

เครื่องมือ. นำเข้าความน่าจะเป็นสู่ปัญหาที่ไม่เอ่ยถึงมันสักคำ เครื่องยนต์ที่หนึ่ง — **ภาวะเชิงเส้นของค่าคาดหวัง:** $E[X_1 + \dots + X_n] = \sum E[X_i]$ โดยสมมุติความเป็นอิสระศูนย์ข้อความยุ่งเหยิงที่พันกันสับสนพันกันจึงแตกตัวเป็นผลบวกรายชิ้นส่วน เครื่องยนต์ที่สอง — **การเฉลี่ย** วิธีความน่าจะเป็น (probabilistic method) ของ Erdős: ถ้าค่าเฉลี่ยทั่วทั้งครอบครัวคือ v สมาชิกบางตัวย่อมทำได้อย่างน้อย v สุ่มหยิบวัตถุ คำนวณคุณค่าคาดหวังของมัน แล้ววัตถุดีๆ ก็มีอยู่จริง — โดยไม่เคยถูกสร้างขึ้นเลย

กลั่น. "จงพิสูจน์ว่ามีการจัดเรียง / การระบายสี / สับเซต ที่อย่างน้อย..." โดยมองไม่เห็นวิธีสร้าง: จงสุ่มแล้วเฉลี่ย ปริมาณใดก็ตามที่เป็นผลบวกของส่วนช่วยเหลือๆ จำนวนมากที่ทับซ้อนกัน: ผลบวกตัวชี้วัด (indicator) รีเฟล็กซ์: **ตั้งชื่อตัวชี้วัด** — แล้วมองดูการพึ่งพากัน อุปสรรคตัวใหญ่ในทุกที่อื่น กลายเป็นไม่สำคัญเสียเฉยๆ

★★ · การเรียงสับเปลี่ยนเฉลี่ย

จงแสดงว่าจำนวนจุดตรึงเฉลี่ยของการเรียงสับเปลี่ยนสุ่มของ n สมาชิกคือ 1 — สำหรับทุก n

หยุดก่อน ห้ามใช้ผลบวกบน k

เฉลย. ให้ $X_i = 1$ ถ้า $\pi(i) = i$ มิฉะนั้นเป็น 0 ; จำนวนจุดตรึงคือ $X = \sum X_i$ และ $E[X_i] = P(\pi(i) = i) = (n-1)!/n! = 1/n$ ภาวะเชิงเส้น — X_i ทั้งหมดสหสัมพันธ์กันหนักหน่วง และนั่นไม่สำคัญเลย: $E[X] = n \cdot (1/n) = 1$ ■

เลขคณิตข้อนี้ก็คือเอกลักษณ์ IMO จากหมวดที่แล้ว หารด้วย $n!$ แต่การนับสองทางต้องการแรงบันดาลใจ — ต้องหาเซตเหตุการณ์ให้เจอ — ขณะที่ค่าคาดหวังต้องการแคร์เฟล็กซ์ประจำกาย ภาษาความน่าจะเป็นแปลงการบั้งครั้งเดียวจบให้กลายเป็นการคำนวณกิจวัตร; การแปลงนั้นแหละคือประเด็นของการมีเลนส์เป็นของตัวเอง

ทำ — เขียนตัวชี้วัดออกมา. ภาวะเชิงเส้นไม่เคยถามว่าพวกมันอิสระต่อกันหรือเปล่า

★★★★ · รอยตัดใหญ่

จงพิสูจน์ว่ากราฟทุกกราฟที่มี m เส้นเชื่อม มีการแบ่งจุดยอดออกเป็นสองฝั่ง ที่มีเส้นเชื่อมข้ามระหว่างฝั่งอย่างน้อย $m/2$ เส้น (ไม่มีความสุมอยู่ในตัวใจหทัยเลย)

หยุดตรงนี้ โยนเหรียญให้จุดยอดทุกจุด

เฉลย. ระบายสีจุดยอดแต่ละจุดเป็น ซ้าย หรือ ขวา ด้วยเหรียญเที่ยงตรงที่อิสระต่อกัน สำหรับเส้นเชื่อม $e = \{u, v\}$ ให้ X_e ชี้วัดเหตุการณ์ " u กับ v อยู่คนละฝั่ง": $P(X_e = 1) = 1/2$ ดังนั้น $E[\sum X_e] = m/2$ ค่าเฉลี่ย $m/2$ บังคับให้มีบางผลลัพธ์ $\geq m/2$ — ค่าเฉลี่ยเกินค่าสูงสุดของตัวเองไม่ได้ ผลลัพธ์นั้นแหละคือการแบ่งฝั่งที่ต้องการ ■

จากนั้นถอดความสุม (derandomize) ด้วยเพื่อนเก่าคนหนึ่ง บทพิสูจน์ไม่ได้ระบุชื่อรอยตัดสักอัน แต่ monovariant (บทที่ 9) สกิดมันออกมาได้: เริ่มที่ไหนก็ได้; トラバใดที่ยังมีจุดยอดสักจุดที่มีเพื่อนบ้านฝั่งตัวเองมากกว่าฝั่งตรงข้าม จงพลิกฝั่งมัน การพลิกแต่ละครั้ง

เพิ่มจำนวนเส้นข้ามฝั่งโดยแท้ ซึ่งถูกขังเพดานไว้ที่ m กระบวนการจึงต้องหยุด — และ ณ จุดหยุด จุดยอดทุกจุดมีอย่างน้อยครึ่งหนึ่งของดีกรีข้ามฝั่งอยู่ ดังนั้นเส้นข้าม $\geq \frac{1}{2} \cdot \sum \deg(v)/2 = m/2$ การค้นเฉพาะที่ (local search) หาสิ่งที่ดีกว่าจะเป็นให้สัญญาไว้จนเจอ (สูงขึ้นอีกชั้นบันได: การกำหนดค่าแบบสุ่มทำให้อนุประโยค (clause) ของสูตร 3-SAT ใดๆ เป็นจริงได้ $7/8$ ส่วน แต่ละอนุประโยคล้มด้วยความน่าจะเป็น $1/8$ — และ Håstad พิสูจน์ว่า $7/8$ คือค่าประมาณที่ดีที่สุดแล้ว เว้นแต่ $P = NP$ ขอบเขตสุ่มแสนธรรมดาคือพรมแดนเป๊ะๆ ของความแก้ไข)

Erdős ก่อตั้งวิธีนี้ในปี 1947 ด้วยการหาขอบเขตล่างของจำนวน Ramsey ผ่านการระบายสีสุ่ม มันคือการคิดแบบกรณีเฉลี่ยในฐานะอาวุธ: ถามว่ากรณีตามแบบฉบับทำได้แค่ไหน แล้วอุปเกรดความตามแบบฉบับให้เป็นการมีอยู่ (การเฉลี่ย) หรือเป็นอัลกอริทึม (การถอดความสุ่ม) ปาฏิหาริย์นักโทษร้อยคนของบทที่ 7 คือเลนส์นี้เปิดเติมกำลัง — อัตราอดของปัจเจกไม่มีใครดีขึ้นเลย; กลยุทธ์เพียงต่อต้านความล้มเหลวทั้งหลายให้ไปกองอยู่ในโลกช่วยชุดเดียวกัน ค่าเฉลี่ยแต่ละตัวต้องไม่ได้; ความแปรปรวนคือคานงัด

ท่า — อุปเกรดค่าเฉลี่ยเป็นการมีอยู่ แล้วเป็นอัลกอริทึม.

เครื่องจักรกับท่านี้. ไม่มีอะไรให้การเสริมคันเจอ จนกว่าใครสักคนจะหล่อกรอบ "มีอยู่" เสียใหม่เป็น "ค่าเฉลี่ย" — การเป็นเจ้าของการตัดสินใจที่จะสุ่มโลกที่กำหนดแน่นอนไว้แล้ว ยังคงเป็นส่วนของมนุษย์

งบประมาณมาก่อน

เครื่องมือ. ก่อนลงมือแก้ จงตั้งงบ: ขนาดของปริภูมิค้นหา ปริมาณสารสนเทศของคำตอบ จำนวนปฏิบัติการที่จ่ายไหว — แล้วปล่อยให้ตัวเลขเหล่านั้นเลือกวิธีให้ สำหรับโปรแกรมเมอร์นี่คือความหมายตรงตัว: ราว 10^8 ปฏิบัติการง่ายๆ ต่อวินาที เงื่อนไขขอบเขตของโจทย์จึงเข้ารหัสอัลกอริทึมที่ผู้ออกตั้งใจไว้ สำหรับนักคณิตศาสตร์มันคือเชิงทฤษฎีสารสนเทศ: กระบวนการที่มีผลลัพธ์สามทางจำนวน k ครั้ง แยกแยะได้อย่างมาก 3^k สถานการณ์ กลยุทธ์ใดๆ จึงต้องใช้อย่างน้อย $\log(\#กรณี)$ ขั้นตอน — ขอบเขตล่างที่ไม่เรียกร้องความเฉลียวฉลาด เรียกร้องแค่การนับ

แหวนถอดรหัสของนักแข่งเขียนโปรแกรม ควรค่าแก่การพิมพ์แปะข้างโต๊ะ:

เงื่อนไขขอบเขต	รูปทรงที่ง่ายไหว	เจตนาตามแบบฉบับ
$n \leq 11$	$n! \approx 4 \cdot 10^7$	brute-force การเรียงสับเปลี่ยน
$n \leq 20-24$	$2^n \cdot n$	bitmask DP
$n \leq 40$	$2^{n(n/2)}$	meet in the middle
$n \leq 500$	n^3	DP กำลังสาม / วิถีสั้นสุดทุกคู่
$n \leq 10^5-10^6$	$n \log n$	sort / heap / แบ่งแล้วพิชิต
$n \leq 10^8$	n	กวาดเชิงเส้น, two pointers
$n \sim 10^{18}$	$\log n / \sqrt{n}$	ไบนารีเสิร์ชบนคำตอบ, คณิตศาสตร์

อ่านไปข้างหน้า ตารางนี้ตั้งงบให้แผนของคุณ; อ่านย้อนกลับ มันคือเครื่องถอดรหัส
เจตนาผู้ออกโจทย์ของบทที่ 8

กลืน. เงื่อนไขขอบเขตใดๆ ที่ถูกระบุมา — $n \leq 20$, $n \leq 10^5$ และ $n \leq 10^{18}$ คือสามปัญหา
คนละเรื่องที่สวมโจทย์ข้อความเดียวกัน "อย่างน้อยต้องถาม / ชั่ง / เปรียบเทียบกี่ครั้ง?":
ขอบเขตเชิงสารสนเทศกำลังร้องขอให้ถูกนับ แผนที่ยังไม่เคยประเมินต้นทุน: จงประเมิน
ก่อนลงมือ

★★ • พบกันครึ่งทาง

มีสับเซตของ $\{1, 2, 3, 4\}$ กี่ชุดที่ผลบวกเป็น 5 — และคุณจะนับผลบวกสับเซตในหมู่
ตัวเลข 40 ตัวอย่างใด ในเมื่อ brute force บน $2^{40} \approx 10^{12}$ สับเซตนั้นตายสนิท?

หยุดก่อน ผ่าตัวปัญหา ไม่ใช่ผ่าครึ่งความต่าง

เฉลย. ผ่าครึ่ง: $L = \{1, 2\}$, $R = \{3, 4\}$ ผลบวกสับเซตของแต่ละข้างคือ $\{0, 1, 2, 3\}$ และ
 $\{0, 3, 4, 7\}$ สับเซตเต็มตัวคือคู่หนึ่งคู่ หยิบขึ้นส่วนข้างละหนึ่ง และมันแตะ 5 เมื่อ $s_l + s_r$
 $= 5$: คู่ $(1, 4) = \{1\} + \{4\}$ กับ $(2, 3) = \{2\} + \{3\}$ **สองสับเซต** ตรงกับการแจกแจงตรงๆ
สำหรับ $n = 40$: แจกแจงผลบวก $2^{20} \approx 10^6$ ค่าของแต่ละครึ่ง sort ข้างหนึ่ง แล้วไบนารี
เสิร์ชหาตัวเต็มเต็ม — ราว $2^{20} \cdot 20$ ปฏิบัติการ เป็นหลักวินาทีแทนที่จะเป็นหลักศตวรรษ

ไอดีเดียวที่ใช้คือเลขคณิต: 2^n ฆ่าคุณตาย $2 \cdot 2^{(n/2)}$ ถูกแสนถูก และคู่ของครึ่งสับเซตสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับสับเซต เลขคณิตงบประมาณไม่ได้แค่ตรวจวิธี — มันประดิษฐ์วิธีขึ้นมาเลย ■

ทำ — ชื่อเลขชี้กำลังมาครึ่งเดียว. เมื่อ 2^n ฆ่าคุณ จงถามว่าปัญหาฆ่าออกเป็นสองครึ่งที่มาบรรจบกันตรงตะเข็บได้หรือไม่

หน้าเชิงทฤษฎีสารสนเทศของทำนี่ชนะศึกไปแล้วในบทที่ 7: การชั่งลูกบอลสิบสองลูกมีคำตอบเป็นไปได้ 24 แบบ กับตาชั่งสามผลลัพธ์ — $3^2 = 9 < 24$ สองครั้งชั่งจึงตายสนิท; $3^3 = 27$ ผ่านฉิวเฉียด และขอบเขตนี้ทำงานสองหน้าที่ ออกแบบแผนการชั่งให้ด้วย: การชั่งแต่ละครั้งต้องฆ่าผู้รอดชีวิตให้ใกล้สามส่วนเท่าๆ กัน จึงต้องสืต่อสื ขณะที่หกต่อหกทั้งผลลัพธ์ตาชั่งสมดุลไปเปล่าๆ นับปริภูมิคำตอบ นับความจุของสัญญาณ ให้อัตราส่วนเป็นหางเสือ — รีเฟล็กซ์เดียวกันนี้ตีราคาเกมยี่สิบคำถาม ($2^{20} \approx 10^6$ วัตถุ) การ sort ด้วยการเปรียบเทียบ ($\log_2 n! \approx n \log n$) และเมื่ออ่านย้อนกลับ เงื่อนไขขอบเขตของคนออกโจทย์

เครื่องจักรกับทำนี่. อะซิมป์โทติกคือธาตุแท้ของเครื่องจักร กระนั้นการประเมินก่อนคำนวณคือพฤติกรรมเชิงวางแผนที่เอเจนต์อัตโนมัติขึ้นชื่อลือชาว่าชอบข้าม — และขอบเขตเชิงสารสนเทศคือบทพิสูจน์ว่าด้วยกลยุทธ์ทั้งหมด ไม่ใช่กลยุทธ์อันใดอันหนึ่ง: รสไม่เชิงสร้าง (nonconstructive) แบบนั้นอีกแล้ว

สามฉากใหญ่

เรื่องเล่าเลื่องชื่อสามเรื่อง แต่ละเรื่องคือเครื่องมือหนึ่งชิ้นในชุดแพนซีที่โด่งดังที่สุดของมัน — และแต่ละเรื่องมาพร้อมการแก้ไขข้อมูลที่ฉบับเล่าซ้ำมักข้ามไป

★★ · สะพานทั้งเจ็ดแห่ง Königsberg

Königsberg ปี 1736 — ปัจจุบันคือ Kaliningrad แม่น้ำ Pregel แบ่งเมืองออกเป็นแผ่นดินสี่ผืน — เกาะ Kneiphof ฝั่งเหนือ ฝั่งใต้ และแหลมด้านตะวันออก — เชื่อมกันด้วยสะพานเจ็ดแห่ง จะเดินเล่นให้ข้ามสะพานทุกแห่ง แห่งละหนึ่งครั้งพอดี ได้หรือไม่?

หยุดก่อน ตอนนี้คุณมีเครื่องมือแล้ว: ตั้งชื่อจุดยอด

เฉลย. ท่าของ Euler — พู๊ดได้เต็มปากว่าเป็นปฐมบทของทฤษฎีกราฟและของโทโพโลยี "เรขาคณิตแห่งตำแหน่ง" ในถ้อยคำของเขาเอง — คือการลบเมืองทิ้ง: แผ่นดินแต่ละผืนเป็นจุด สะพานแต่ละแห่งเป็นเส้น สิ่งที่เหลือรอดมีแค่โครงสร้างอุบัติการณ์ จากนั้นคือข้อสังเกต: การเดินที่ผ่านทะลุจุดยอดหนึ่ง บริโกละสะพานของมันเป็นคู่ เข้าหนึ่งออกหนึ่ง ดังนั้นแผ่นดินทุกผืน ยกเว้นอย่างมากที่สุดจุดตั้งต้นกับจุดสิ้นสุด ต้องมีสะพานเป็นจำนวนคู่ ดีกรีของ Königsberg คือ 5, 3, 3, 3 — รวมได้ $14 = 2 \times 7$ สะพาน เช็กสถิติเย็บๆ ของบทตั้งการจับมือ — จุดยอดคี่ที่สุด ในขณะที่การเดินหนึ่งรอบทอนได้อย่างมากสอง การเดินเล่นเช่นว่าจึงไม่มีอยู่จริง ■ Euler พิสูจน์ฝั่งความเป็นไปไม่ได้; ส่วนที่ว่าจุดยอดคี่ไม่เกินสองนั้นเพียงพอบนมัลติกราฟเชื่อมโยง ถูกตอกตะปูปิดโดย Hierholzer ในปี 1873

คติของเรื่องคือท่าเปิดบทนี้ทั้งบทในฉบับจิว: การบั้งไม่ได้เกี่ยวกับสะพานเลย มันคือการตัดสินใจว่ามีแต่โครงสร้างเท่านั้นที่สำคัญ — นามธรรมหนึ่งชั้น จากนั้นภาวะคู่คี่ (parity) ที่เด็กก็เช็กได้

ท่า — ลบเมืองทิ้ง. ปอกทุกรายละเอียดที่คำถามไม่ได้บริโกลออกไป; สิ่งที่เหลือมักเป็นปัญหาที่แก้ได้แล้ว

★★★ • วงกลมของ Josephus

ตำนานว่าไว้: Yodfat ปี ค.ศ. 67 — นักประวัติศาสตร์ Flavius Josephus ติดกับดักอยู่กับเหล่าทหารของเขา และรอดชีวิตจากวงกลมมรณะ ความเชื่อตรงต้องมาก่อน: บันทึกของเขาเอง (The Jewish War เล่ม 3) บอกว่าใช้การจับสลาก และเขาเหลือรอดจนคนสุดท้าย "โดยบังเอิญหรือโดยพรหมลิขิต" ฉบับกำหนดแน่นอน — n คนยืนเป็นวงกลม นับวนไปทุกคนที่ k ล้มลง คนสุดท้ายรอด — คือการจัดรูปของนักคณิตศาสตร์ยุคหลัง คุณควรไปยืนตรงไหน?

หยุดก่อน แก้วสองคนก่อน แล้วค่อยวงสามคน

เฉลย. ให้ $J(n)$ เป็นตำแหน่งผู้รอดชีวิต ดัชนีเริ่มที่ 0 ก้าวนับ k หลังการกำจัดครั้งแรก (ตำแหน่ง $k - 1$) คนที่เหลือ $n - 1$ คนเล่นเกมเดียวกันเป๊ะแค่เลื่อนไป k : $J(n) = (J(n-1) + k) \bmod n$ โดย $J(1) = 0$ หนึ่งบรรทัด รันได้ใน $O(n)$ ทวนสอบด้วยการจำลองสำหรับ k

= 2: $n = 5$ กำจัด 2, 4, 1, 5 เหลือ **3** และความสัมพันธ์เวียนเกิดให้ 0, 0, 2, 0, 2 → ตำแหน่ง 3 ✓; $n = 6$ กำจัด 2, 4, 6, 3, 1 เหลือ **5** และความสัมพันธ์เวียนเกิดให้ 4 → ตำแหน่ง 5 ✓ สำหรับ $k = 2$ มีรูปปิด: เขียน $n = 2^m + L$ โดย $0 \leq L < 2^m$; ผู้รอดชีวิตนับจาก 1 คือ $2L + 1$ พุดอีกแบบที่เทียบเท่ากัน — อัญมณีเม็ดหนึ่ง — หมุนการแทนฐานสองของ n ไปทางซ้ายหนึ่งบิต: $41 = 101001_2 \rightarrow 010011_2 = 19$ และจริงตามนั้น $41 = 32 + 9$ ให้ $2 \cdot 9 + 1 = 19$ ✓; $6 = 110_2 \rightarrow 101_2 = 5$ ✓ (รอบแรกกำจัดตำแหน่งเลขคู่ทั้งหมด และผู้รอดถูกติดป้ายใหม่เป็นการเลื่อนบิตฐานสองพอดิบพอดี — การเวียนเกิดที่มองเห็นได้ในตัวฐานเลข) ตัวเลขของตำนาน: ด้วย $n = 41$ กับ $k = 3$ ความสัมพันธ์เวียนเกิดรันเต็มรูปให้ $J(41) = 30$ — ตำแหน่ง **31** เมื่อนับจาก 1 โดยผู้รอดรองสุดท้ายอยู่ที่ **16** ฉบับเล่าขานดั้งเดิม — Josephus ที่ตำแหน่ง 31 กับสหายที่ 16 — แม่นยำเชิงเลขคณิตเป๊ะ ไม่ว่านักประวัติศาสตร์ผู้นั้นจะคำนวณหรือด้นสด ■

ทำ — ทดลองให้เล็กลง. การกำจัดหนึ่งครั้งเปลี่ยนเกมให้เป็นสำเนาย่อยส่วนของตัวมันเอง ที่ถูกติดป้ายใหม่; จงแก้งเล็กลงที่สุด แล้วยกคำตอบกลับขึ้นมา

★ • ผลบวกของคุณครู

เรื่องเล่า: ครู Büttner สั่งให้ทั้งชั้นบวก $1 + 2 + \dots + 100$ หมายถึงได้ชั่วโมงเจียบสงบ; หนูน้อย Gauss เขียน 5050 ลงกระดานชนวนแทบจะทันที ทำได้อย่างไร — และมันเกิดขึ้นจริงหรือเปล่า?

หยุดก่อน คุณเจอทำนี้มาแล้วในบทที่ 9

เฉลย. จับตัวแรกคู่กับตัวสุดท้าย: $1 + 100, 2 + 99, \dots, 50 + 51$ — ห้าสิบคู่ คู่ละ 101 พอดี: $50 \times 101 = \mathbf{5050}$ รูปทั่วไปที่ทนทานกว่าเสียงซอังกัวลเรื่อง n คือได้ทุกประตู: เขียนผลบวกไปข้างหน้าและย้อนกลับ แล้วบวกทีละคอลัมน์ — $2S = n(n + 1)$ ดังนั้น $S = n(n + 1)/2$ ■ ที่นี้มาดูบันทึกจริง: แหล่งข้อมูลแรกสุดของเกร็ดนี้ ชีวประวัติที่ระลึกของ Gauss โดย Sartorius von Waltershausen (1856) เอ่ยถึงโจทยอนุกรมเลขคณิตข้อหนึ่ง แต่ไม่ได้ระบุทั้ง 1-ถึง-100 และทริกจับคู่; รายละเอียดชวนเห็นภาพพอกพูนขึ้นตลอดหนึ่งศตวรรษของการเล่าซ้ำ และ Brian Hayes (American Scientist, 2006) ตามรอยพบฉบับเล่าหลายสิบฉบับที่ขัดแย้งกันเอง จงเล่ามันแบบตำนาน; จงสอนมันแบบ

คณิตศาสตร์ เนื้อแท้จริงคืออินวอลูชัน $k \mapsto n + 1 - k$ ที่ทำให้ทุกคู่บวกได้ค่าคงตัว — หินฐานรากที่ใช้บวกอนุกรมเลขคณิตได้ทุกอนุกรม และแสดงว่า $C(n, k) = C(n, n-k)$

ท่า — จับคู่ให้ได้ค่าคงตัว. เครื่องมือสมมาตรของบทที่ 9 ในชุดออกงานวันอาทิตย์

ห้องสมุด ครบชุดแล้ว

เครื่องมือสิบหกชิ้นตลอดสามบท — กล้องถูกประดิษฐ์ ประจุถูกอนุรักษ์ ตัวสุดชั่วถูกชักถาม กระจุถูกยกขึ้นส่อง การระบายสีถูกวิศวกรรม; สมมุติฐานถูกเสริมแรง ประวัติศาสตร์ถูกบีบอัด ค่าเหมาะที่สุดถูกปั้นรูป ธรณีประตูกผ่าครึ่ง ตารางถูกรื้อย้อนกลับ; จุดยอดถูกตั้งชื่อ สมมาตรถูกหารทิ้ง ปีกถูกแปลงเป็น n ผลบวกถูกนับจากด้านข้าง โลกถูกเฉลี่ย งบประมาณถูกอ่าน หนังสือทุกเล่มในห้องสมุดนี้คือวิธีของการมองเห็น ไม่ใช่วิธีของการบดขยี้ เครื่องจักรก็อ่านห้องสมุดนี้จบแล้วเช่นกัน — พวกมันอ่านมาแล้วทุกอย่าง ตรงไหนที่วันนี้พวกมันรันเครื่องมือได้เร็วกว่ามนุษย์คนไหนๆ และตรงไหนที่พวกมันยังเอื้ออหิบบั่นเองไม่ได้หากไม่มีใครสะกิด คือคำถามของภาคถัดไป ซึ่งมาพร้อมวันที่และตัวเลข

ภาค IV

แต่เมื่อของมนุษย์

บทที่ 12

กระดานคะแนน

ภาค I ถึง III ของหนังสือเล่มนี้เขียนขึ้นในห้องสมุด ภาคนี้ส่งตรงมาจากแนวหน้า

ระหว่างธันวาคม 2024 ถึงกรกฎาคม 2026 สนามแข่งชุดหนึ่งที่ยืนหยัดมาหลายปี — หนึ่งในนั้นคือเบนช์มาร์ก (benchmark) ที่สร้างขึ้นเพื่อให้อยู่ทนกว่าเครื่องจักรโดยเฉพาะ — ถูกตัดสินจนจบ และไม่ใช่ฝั่งเราที่ชนะ ทุกวันนี้ซอฟต์แวร์ทำคะแนนแข่งมนุษย์ในหลายสิ่งที่สปีดเบทก่อนหน้านี้สอนให้คุณรัก จะเขียนหนังสือว่าด้วยปัญญาธรรมชาติในปี 2026 อย่างซื่อสัตย์โดยไม่วางเรื่องนี้ลงบนโต๊ะเป็นอย่างแรก — ครบถ้วน พร้อมวันที่ — เป็นไปไม่ได้

ภาค IV จึงเป็นรายงานสงครามสามฉบับจากแนวหน้า บทนี้คือบัญชีของสิ่งที่ร่วงหล่น บทที่ 13 เติมน้ำจืดเมืองที่ยั่งยืนอยู่ บทที่ 14 รายงานพื้นที่ช่วงชิงตรงกลาง ที่แนวรบยังขยับอยู่ขณะหนังสือเล่มนี้เข้าแท่นพิมพ์

กติกาสามช็อกกับทั้งสามบท เพราะภาคนี้แบกพันธะพิเศษ: มันจะถูกอ่านหลังจากตัวเลขบางตัวของมันหมดอายุไปแล้ว และมันตั้งใจจะได้รับความเคารพอยู่ดี

ทุกข้อกล่าวอ้างมีวันที่กำกับ "ณ กรกฎาคม 2026" ไม่ใช่คำพูดติดปาก มันคือวลีแบกน้ำหนักของทั้งภาค ข้อกล่าวอ้างเรื่องความสามารถที่ไร้น้ำหนักคือโฆษณา

ทุกความสามารถมีแท็กกำกับ **FALLEN** แปลว่าเครื่องจักรเทียบเท่าหรือชนะมนุษย์บนหลักฐานที่มีวันที่ **ERODING** แปลว่าแค้นต่อมนุษย์มีจริงแต่กำลังตกลงบนนาฬิกาที่วัดได้ **DURABLE** แปลว่าแค้นต่อมนุษย์ห้าปียังเป็นเดิมพันที่แก้ต่างได้ — แก้ต่างได้ไม่ใช่ศักดิ์สิทธิ์

ข้อกล่าวอ้างที่แบกงานจริงมีเกร็ดติดตัว ♠ หมายถึงผลลัพธ์จากแหล่งปฐมภูมิ ▲ ตัวเลขทุติยภูมิหรือยังพิพาทกันอยู่ ☹ กลไก — ว่าทำไมบางอย่างจึงเกิดขึ้น — และ ♦ กฎหัวแม่มือ ตรงไหนตัวเลขมาจากตัวรวบรวมกระดานคะแนน (leaderboard aggregator) แทนที่จะมาจากแล็บ ตัวบทยจะบอกไว้

แต่พวกเขากำลังทำงานที่คำคุณศัพท์ทำไม่ได้ "AI น่าทึ่ง" กับ "AI ถูกโหมเกินจริง" เป็นอารมณ์ทั้งคู่ ส่วน **FALLEN** ลงวันที่ธันวาคม 2024 คือข้อความเกี่ยวกับโลกที่ตรวจสอบได้ ภาคนี้อาารมณ์ไปแลกกับข้อความ

ถ้าคุณอ่านหน้านี้ในปี 2028 แล้วบรรทัดไหนข้างล่างถูกโลกวิ่งแข่งไปแล้ว — ดี วันที่มีไว้เพื่อการนั้น จงตัดสินใจวิธีการ ไม่ใช่ภาพนิ่ง และห้ามเชียร์ไม่ว่าทิศไหน: กระดานคะแนนที่ประจบทีมเหย้าไม่ใช่กระดานคะแนน

ข้อสอบที่สร้างมาให้ยืทนกว่าเครื่องจักร **FALLEN**

บทที่ 3 จบลงที่ Abstraction and Reasoning Corpus — ประตูด่านของสฟิงซ์ที่ถูกสร้างขึ้นใหม่สำหรับเครื่องจักร นี่คือนี่ที่เกิดขึ้นกับมัน

ARC-AGI-1 (2019) วางเดิมพันไว้สะอาดหมดจด: ตารางเล็กๆ ของช่องสี่ ตัวอย่างการแปลงไม่กี่ชุด แล้วตามด้วยเคสใหม่ — จงหากฎ ไม่มีเกร็ดความรู้ให้ท่องจำ ไม่มีชุดฝึกให้ชุด แต่ละภารกิจเรียกร้องการสร้างนามธรรมสดใหม่ เป้าหมายการออกแบบไม่เคยเป็นการยากแบบที่หมากรุกยาก แต่เพื่อวัดว่าผู้แก้โจทย์เรียนทักษะใหม่เอี่ยมจากตัวอย่างหยิบมือเดียวได้อย่างมีประสิทธิภาพแค่ไหน — สิ่งที่ได้ๆ ทำกันทั้งวัน และเครื่องจักรทำไม่ได้เลยอยู่หลายปี เดิมพันนี้อยู่ห้าปี ผ่านการขยายสเกลห้าหมื่นเท่าของโมเดลภาษาที่ถูกโยนใส่มัน ๕ ครั้งทศวรรษที่คะแนนฝั่งเครื่องจักรปะอยู่ติดพื้นขณะแทบทุกอย่างในวงการ AI ขยับ แล้วในธันวาคม 2024 o3 ของ OpenAI — ทีมการคำนวณมหาศาล ณ เวลาทดสอบ ปรับตัวเข้าหาแต่ละภารกิจแบบสดๆ — ก็ไปถึง 87.5% ในโหมดคำนวณหนัก ห้าปีแห่งความว่างเปล่า แล้วทุกอย่างก็มาถึงภายในฤดูกาลเดียว

ตัวสืบทอดถูกสร้างให้โหดขึ้น ARC-AGI-2 (มีนาคม 2025) สอบเทียบกับผู้ทดสอบมนุษย์กว่า 400 คนที่ San Diego: ทุกภารกิจประเมินผลกันได้ภายในสองครั้งโดยคนธรรมดาอย่างน้อยสองคน และผู้เข้าสอบรายบุคคลเฉลี่ยได้ราว 60% ตอนเปิดตัว โมเดลภาษาล้วนทำได้ 0–4% สิบหกเดือนต่อมา — กรกฎาคม 2026 — กระดานผู้นำแนวหน้าโซว์ราว 85% (GPT-5.5) ตัวเลขจากตัวรวบรวม ▲ สูงกว่ามนุษย์เฉลี่ยและถึงเส้นรางวัลใหญ่ ที่นี้ถึงดอกจันที่สำคัญ: ต้นทุน บนสายแข่งด้านประสิทธิภาพของรายการ ที่ผู้เข้าแข่งได้งบคำนวณราว \$50 ต่อ 120 ภารกิจ คะแนนดีที่สุดคือ 24.03% (NVARC, ธันวาคม 2025) ๕ และรางวัลใหญ่บนชุดข้อสอบกลับยังไม่มีใครคว้าไป ณ กรกฎาคม 2026

เครื่องจักรทำนามธรรมแบบนี้ได้แล้ว แต่ทำด้วยเงินหลักสตางค์เป็นอีกเรื่องหนึ่ง มนุษย์แก้ปริศนาพวกนี้ได้ด้วยแซนด์วิชชิ้นเดียว เส้นด้ายเส้นนั้น — วัตถุ ถ้อยคำ เศรษฐศาสตร์ของความคิด — จะถูกหยิบขึ้นมาต่อในบทที่ 13 เพราะมันเป็นหนึ่งในสิ่งที่ยังยืนอยู่

คำตัดสิน กล่าวอย่างเที่ยงตรง: การให้เหตุผลเชิงนามธรรมแบบสถิติ ในฐานะความสามารถ ร่วงหล่นภายในกรกฎาคม 2026 ข้อโต้แย้งเรื่องประสิทธิภาพยั้งรอด และผู้ออกแบบเบนซ์มาร์กเองก็ย้ายธงไปปักที่โลกแบบโต้ตอบ — ARC-AGI-3 — ที่ซึ่งคะแนนพลิกกลับหัวอย่างตระการตา ศักินั้นเป็นของบทที่ 14

หนึ่งปีหลัง "มนุษยชาติชนะแล้ว" FALLEN

การเขียนโปรแกรมแข่งขันร่วงหล่นเป็นสององก์ ห่างกันสิบสองเดือน และวันที่ทั้งหลายสมควรถูกเขียนออกมาเต็มๆ

องก์หนึ่ง: กรกฎาคม 2025, AtCoder World Tour Finals สายฮิวริสติก — การหาค่าเหมาะสมสุดปลายเปิดปะทะมืตี่ที่สุดของโลก แชมป์มนุษย์ ผู้แข่งได้ชื่อ Psycho เอาชนะผู้เข้าแข่งของ OpenAI แล้วโพสต์สามคำที่เดินทางรอบโลก: "humanity has prevailed" — มนุษยชาติชนะแล้ว

องก์สอง: โตเกียว 9 กรกฎาคม 2026 ที่รอบชิงเดียวกันหนึ่งปีให้หลัง โมเดลของ OpenAI กวาดครบทั้งห้าข้อและทำ 8,300 คะแนน มนุษย์ที่ดีที่สุดได้ 4,300 ▲ (ตัวเลขจากรายงานข่าว) ไม่ใช่เฉือนชนะ — เกือบสองเท่า ICPC World Finals ปีเดียวกัน สนามแข่งประเภททีมชั้นนำของนักเขียนโปรแกรมระดับมหาวิทยาลัย ก็ไปทางเดียวกันก่อนหน้านี้แล้ว: ระบบของ OpenAI แก่ครบทั้งสิบสองข้อ (2025)

สังเกตให้ดีว่าสนามโตเกียวเป็นสนามแบบไหน สายฮิวริสติกไม่มีคำตอบถูกหนึ่งเดียว — ผู้เข้าแข่งไล่ล่าคะแนนดีที่สุดในปริภูมิการค้นหาอันมืตี่มา มันร่วงอยู่ดี และนั่นสำคัญต่อแบบแผนท้ายบทนี้: สิ่งที่ทำให้ภารกิจหนึ่งเป็นสนามที่เครื่องจักรชนะได้ ไม่ใช่คำตอบหนึ่งเดียว แต่คือการให้คะแนนอัตโนมัติ โจทย์ปลายเปิดที่มีกระดานคะแนนก็ยังคือโจทย์ปิด

บทเรียนไม่ใช่ว่าชัยชนะปี 2025 กลวงเปล่า มันจริง และได้มาโดยเอาชนะระบบที่ดีที่สุดเท่าที่เคยสร้าง ณ ตอนนั้น บทเรียนคือช่วงห่าง ระยะทางจาก "มนุษยชาติชนะแล้ว" ถึงการโดนกวาดเรียบคือหนึ่งปีพอดี จำช่วงห่างนี้ไว้ทุกครั้งที่หนังสือเล่มนี้พูดว่า ERODING :

ประตู่ AtCoder คือหน้าต่างของการถูกกัดเซาะเมื่อมองจากข้างใน — ชัยชนะมนุษย์ของแท้ เฉลิมฉลองอย่างสุจริตใจ พร้อมนาฬิกาจับถอยหลังที่ไม่มีใครอ่านออกแวนติมาด้วย

เส้นทางพิสุจน์ FALLEN

คณิตศาสตร์โอลิมปิก — ยอดเขาที่ภาค III ฝึกให้ไต่ — ยืนอยู่ได้นานกว่าคำพยากรณ์ส่วนใหญ่ แล้วก็ร่วงตามกำหนดพร้อมที่เหลือ

กรกฎาคม 2025: สองระบบ — Gemini Deep Think ของ DeepMind และโมเดลทดลองของ OpenAI — แตะเส้นเหรียญทองของ International Mathematical Olympiad ที่ 35 จาก 42 คะแนน ๕๕ ผลงานระดับเหรียญทองบนสนามคณิตศาสตร์ที่คัดเข้มข้นที่สุดในโลก จากเครื่องจักร ภายในช่วงชีวิตทำงานของทุกคนที่เคยพูดว่ามันเป็นไปได้

และมันไม่หยุดแค่สนามแข่ง ภายในปี 2026 ระบบแนวหน้าปิดจอทยเปิดไปแล้ว 9 จาก 353 ข้อในคอลเลกชันอันโด่งดังของ Erdős โดยบทพิสุจน์ถูกตรวจในระบบทวนสอบเชิงรูปนัย Lean และได้หักล้าง planar unit-distance conjecture ของ Erdős (ประกาศปี 2026) $\triangle$ (รายงานข่าว) มือสมัครเล่นคนหนึ่งทำงานคู่กับ GPT-5.4 Pro ปิดจอทยเรื่องเซตจำนวนเฉพาะที่เปิดค้างมาหกสิบปี (2026) $\triangle$

อ่านประโยคสุดท้ายอีกรอบ: มือสมัครเล่น เครื่องจักรให้เทคนิค มนุษย์ให้คำถาม ความอึด และวิจารณ์ญาณว่าจะไร่นับว่าเสร็จ ตลอดผลลัพธ์คณิตศาสตร์ปี 2025–26 บทบาทมนุษย์แคบลงเหลือสามอย่าง — เลือกจอทย วางกลยุทธ์ และตรวจรับผลลัพธ์ เก็บสามอย่างนี้เข้าแฟ้มไว้ มันคือโครงกระดูกของบทถัดไป

และรายละเอียดเรื่อง Lean ไม่ใช่เกร็ดเทคนิค มันคือกลไกที่ถูกกางออกให้ดู $\odot$ ตัวตรวจบทพิสุจน์เชิงรูปนัยคือผู้ตรวจรับที่ถูกที่สุดและเข้มงวดที่สุดเท่าที่มี — กรรมการที่ทำงานฟรี ไม่รู้จักเหนื่อย และป้อยเอาใจไม่ได้ มอกรรมการคนนี้ให้เครื่องจักรนักค้นหา มันจะลองทางตันคืบคลานทางแล้วเก็บไว้เฉพาะที่คอมไพล์ผ่าน คณิตศาสตร์ไม่ได้ร่วงทั้งที่มันเคร่งครัด มันร่วงเพราะมันเคร่งครัด

ขณะหนังสือเล่มนี้เข้าแท่นพิมพ์ IMO 2026 กำลังดำเนินอยู่ที่เชียงใหม่ (10–21 กรกฎาคม 2026) โดยตลาดพยากรณ์ให้ราคาเหรียญทองของ AI ไว้วาง 82% $\triangle$ ผลลัพธ์ไปตกอยู่ในรายการเฝ้าดูของบทที่ 14 หนังสือเล่มนี้แถลงเดิมพันก่อนผลออก ไม่ใช่หลังผลออก

สื่อการ์ตูนขาว — ในขอบเขตแคบ FALLEN

การวินิจฉัยทางคลินิกควรจะได้ขึ้นอยู่กับอย่างปลอดภัยหลังใบประกอบวิชาชีพและประสบการณ์ชีวิต บนงานเวอร์ชันจำเพาะเวอร์ชันหนึ่ง มันไม่ปลอดภัย งานศึกษาของ Harvard/Beth Israel Deaconess (เมษายน–พฤษภาคม 2026) จับโมเดลระดับ o1 ประชันกับเวชระเบียนห้องฉุกเฉินของจริง: ความแม่นยำวินิจฉัย 67.1% สำหรับโมเดลเทียบกับ 55.3% และ 50.0% ของแพทย์เฉพาะทางผู้เชี่ยวชาญสองกลุ่ม ๕๕ (งานศึกษาผ่านรายงานข่าว) คำจารึกหลุมศพยุคข้อสอบจากปากนักวิจัยเอง: "เราอยู่ที่เพดานแล้ว" ของเบนซ์มาร์กแบบปรนัย

ประโยคนั้นสมควรถูกอ่านซ้ำๆ ข้อสอบปรนัย — เครื่องมือที่ระบบใบอนุญาตวิชาชีพทั้งศตวรรษตั้งอยู่บนมัน — หยุดสามารถแยกเครื่องจักรออกจากผู้เชี่ยวชาญได้ตั้งแต่ก่อนกลางปี 2026 ไม่ว่าเรา仍将อยากรู้เกี่ยวกับวิจารณ์ญาณมนุษย์ในการแพทย์ ข้อสอบไม่ใช่ที่ที่เราอาจทำได้อีกต่อไป

ที่นี่ความกว้างของข้อกล่าวอ้าง อย่างเที่ยงตรง โมเดลอ่านเวชระเบียน มันไม่ได้บริหารแผนก งานศึกษาเป็นข้อความล้น ระบบชั้นเดียวกันนี้มีแนวโน้มสั่งตรวจเกินจำเป็น และช่องว่างระหว่างการวินิจฉัยถูกบนกระดานกับผู้ป่วยที่ได้รับการรักษาจริงในโรงพยาบาลที่เดินเครื่องอยู่ก็ยิ่งกว้าง (Stanford–Harvard State of Clinical AI, 2026) สิ่งที่ร่วงคือการอ่านชาร์ตที่เตรียมไว้ให้ ได้ดีกว่านักอ่านผู้เชี่ยวชาญระดับมัธยมศึกษา — งานสถิติ ระบุครบถ้วน ตรวจสอบได้ กำสามคำคุณศัพท์นั้นไว้ให้แน่น พวกมันกำลังจะกลายเป็นวิทยานิพนธ์ของบทนี้

บัญชีที่เหลือ FALLEN

อีกหกรายการ ปีถัดเป็นตารางเพราะภาคนี้เคารพเวลาของคุณ แต่ละรายการคือของจริง แต่ละรายการแบกดอกจันของตัวเอง — และดอกจันคือที่ที่สองบดอัดไปอาศัยอยู่

สิ่งที่ร่วง	หลักฐานพร้อมวันที่	ดอกจัน
การจำและการให้เหตุผลระดับข้อสอบผู้เชี่ยวชาญ	Humanity's Last Exam: คะแนนดีสุด ~53.3% โมเดลแนวหน้าเกาะกลุ่มแน่น (กรกฎาคม 2026) [△]	ข้อสอบกำลังอ้อมตัวในฐานะตัวจำแนกความต่างระหว่างโมเดล — ยังไม่มีโมเดลไหนสอบมันได้เต็ม

สิ่งที่ร่วม	หลักฐานพร้อมวันที่	ดอกเบี้ย
การโน้มน้าวแบบเฉพาะบุคคล	GPT-4 แบบรู้ข้อมูลส่วนบุคคล: odds การเปลี่ยนความคิดเห็นสูงกว่านักได้วาทิมนุชย์ +81.2% (Nature Human Behaviour, พฤษภาคม 2025) ๕๕	โน้มน้าวได้ไม่เท่ากับรับผิดชอบต่อสิ่งที่โน้มน้าวให้ใครไปทำ — บทที่ 13
ชุดแบบทดสอบ theory of mind	เทียบเท่าผู้ใหญ่มนุชย์ถึงการให้เหตุผลอันดับที่ 6 (Frontiers in Human Neuroscience, 2025) ๕๕	ฉากเล่าแบบนี้; การปรับพฤติกรรมเข้าหาจิตใจที่ติดตามข้ามเวลาอย่างล้มเหลว (DialToM, 2026)
ร้อยแก้วเลียนเสียงนักเขียนตัดสินโดยผู้เชี่ยวชาญ	โมเดล fine-tune ถูกผู้อ่านผู้เชี่ยวชาญเลือกชอบ 62% ของครั้ง (CHI, เมษายน 2026) ๕๕	เรื่องเดิม — และสิ่งที่รอดจากมัน — คือชิ้นเอกกลางเวทีของบทที่ 13
การลงมือออกแบบยา	AlphaFold3 → IsoDDE (กุมภาพันธ์ 2026); สารประกอบมะเร็งวิทยาออกแบบโดย AI ชุดแรกตั้งเป้าเข้าทดลองในมนุชย์ปี 2026	ศูนย์การอนุมัติจาก FDA ณ กลางปี 2026; การออกแบบโมเลกุลไม่เท่ากับการได้รับอนุญาตให้มันตัวตน
การขับรถ ในรั้วภูมิศาสตร์	Waymo: 220.6 ล้านไมล์แบบผู้โดยสารล้วน อุบัติเหตุบาดเจ็บสาหัสน้อยกว่าคนขับมนุชย์จับคู่เทียบ 91% (มีนาคม 2026) ๕๕	โดเมนแคบ ทำแผนที่ครบ อุตสาหกรรมข้อมูลจัดเต็ม; รถโรงเรียนจอดนิ่งกับไฟจราจรดับ (2025–26) ยังทำให้มันพังได้ — กรณีทั่วไปคือคู่มือแรกของบทที่ 13

แบบแผนของการร่วมหล่น

วางสิ่งที่ร่วมหล่นเรียงเคียงกัน แล้วโปรไฟล์หนึ่งเดียวก็ผุดขึ้น โปรแกรมสนามแข่ง บทพิสูจน์โอลิมปิก ตารางนามธรรม ข้อสอบ ชาร์ตผู้ป่วยที่เตรียมไว้ โจทย์โต้วาที ร้อยแก้วในน้ำเสียงนักเขียนที่รู้จัก ทุกรายการล้วน:

สถิติ การกึ่งนั่งนิ่งขณะคุณทำงานกับมัน ชาร์ตถูกเขียนเสร็จแล้ว โจทย์ไม่สักลับ ไม่มีชีพพลายเออร์โกหกคุณกลางทาง เวลาไม่ใช่คู่ต่อสู้

ระบุครบถ้วน เป้าหมายมาถึงจากข้างนอก สมบูรณ์พร้อม จงพิสูจน์สิ่งนี้ จงวินิจฉัยสิ่งนี้ จงค้นคะแนนนี้ให้สูงสุด ไม่มีใครในบัญชีผู้ร่างต้องตัดสินใจอะไรควรค่าแก่การอยากได้ — ท่วงท่าที่ยากที่สุดในศาสตร์ของคนออกโจทย์ (บทที่ 8) ถูกทำให้เสร็จล่วงหน้าแล้ว

ตรวจสอบได้ เครื่องจักรตรวจคำตอบได้ถูกและเป๊ะ บทพิสูจน์คอมไพล์ผ่าน Lean หรือ ไม่ผ่าน โปรแกรมได้ 8,300 หรือไม่ได้ ตารางตรงกันหรือไม่ตรง

คุณสมบัติข้อสามคือเครื่องยนต์ ♣ ที่ไหนการตรวจราคาถูก ที่นั่นการฝึกเป็นไปได้: สร้างความพยายามล้านครั้ง เก็บที่ตัวตรวจอวยพร ทำซ้ำจนตัวตรวจพอใจเสมอ ผู้ตรวจรับราคาถูกแปลงการคำนวณดิบให้เป็นทักษะ นั่นคือเหตุผลที่ทฤษฎีบท — มงกุฎเพชรของการให้เหตุผลมนุษย์ ยอดเขาที่ภาค III ปฏิบัติต่อด้วยความเคารพ — ร่างก่อนห้องครัวที่ไม่คุ้นเคย: บทพิสูจน์ตรวจด้วยเครื่องได้ อาหารเข้าตรวจไม่ได้ ผลสุดท้ายของอัตโนมัติในบทที่ 14 ต่อย้ำประเด็นเดียวกันด้วยเงินจริง

มีการพลิกกลับของศักดิ์ศรีฝังอยู่ตรงนี้ และมันแสน มนุษย์จัดอันดับงานพวกนี้ตามความยากสำหรับเรา: โอลิมปิกอยู่เหนือการคุยสัพเพเหระ บทพิสูจน์อยู่เหนือห้องครัว เครื่องจักรเรียงงานตามแกนคนละแกนโดยสิ้นเชิง — ยากแค่ไหนที่จะระบุ และยากแค่ไหนที่จะตรวจ ♣ สองอันดับนี้เกือบตั้งฉากกัน นั่นคือเหตุผลที่ลำดับการร่างดูกลับหัวเมื่อมองจากในมหาวิทยาลัย และถูกต้องเพื่องมอมองจากในรอบฝึกโมเดล Moravec ชี้ความเอียงนี้ไว้หลายทศวรรษก่อน; 2024–2026 วัดมันออกมา

บทแทรกสามข้อ แต่ละข้อได้มาด้วยตัวอย่างที่มีวันที่:

การร่างมาฉับพลัน ARC-AGI-1 นั่งติดพื้นห้าปี แล้วเตะ 87.5% ภายในฤดูกาลเดียว (ธันวาคม 2024) AtCoder ไปจากแชมป์มนุษย์ถึงโดนกวาดเรียบในสิบสองเดือนพอดี (กรกฎาคม 2025 → 9 กรกฎาคม 2026) ความสามารถมาถึงเป็นฟังก์ชันขั้นบันไดบ่อยกว่าเป็นทางลาด และความเสียบยาวนานก่อนการร่างแทบไม่บอกอะไรเกี่ยวกับวันที่ของการร่างเลย ♦ ความฉับพลันนี้มีกลไก ♣: ความสามารถสะสมตัวอย่างมองไม่เห็น — ในสเกล ในเครื่องมือ ในกลเม็ด ณ เวลาทดสอบ — ขณะคะแนนนั่งนิ่ง เหมือนน้ำที่ขึ้นสูงหลังเขื่อน คะแนนวัดน้ำที่ล้นข้าม ไม่ใช่ในอ่าง เมื่อสันเขื่อนถูกข้ามในที่สุด การกระโดดจึงดูราวเกิดขึ้นชั่วพริบตา ทั้งที่การเติมน้ำไม่เคยฉับพลันเลย

การร่างเป็นทางเดียว ไม่มีอะไรในบัญชีนี้ลุลกลับขึ้นยืน เบนซ์มาร์กถูกปลดระวางแล้ว สร้างใหม่ให้โหดขึ้น — ARC-2 หลัง ARC-1, ARC-3 หลัง ARC-2 — แต่ไม่มีความสามารถ

ที่สาธิตแล้วรายการไหนสูญหาย กระดานคะแนนคือเฟืองหมุนทางเดียว แผนใดที่ต้องพึ่งให้ความสามารถที่ร่วงแล้วร่วงกลับคืน ไม่ใช่แผน ✦

เบนซ์มาร์กที่ร่วงไม่เท่ากับตัวแทนที่เข้าประจำการแล้ว คะแนน ARC ~85%

(กรกฎาคม 2026) ริงบนงบทที่ไกลเกิน \$50 ที่ซื้อได้ 24.03% (ธันวาคม 2025) ตัวเลขวินิจฉัย 67.1% มาพร้อมการสังตรวเกินและไม่มีวอร์ดให้ต้องรับผิดชอบ ยาที่ออกแบบแล้วมีศูนย์การอนุมัติ ณ กลางปี 2026 ความสามารถร่วงก่อน เศรษฐศาสตร์ การผนวกเข้าระบบ และการะรับผิดร่วงที่หลัง หรือไม่ร่วงเลย บทที่ 13 ส่วนใหญ่อาศัยอยู่ในช่องว่างนั้น

อีกสิ่งหนึ่งควรอยู่ในบัญชีที่ซื้อสัตย์ และมันไม่ใช่ตัวเลข ถ้าบางอย่างในบัญชีผู้ร่วงคือยอดเขาของคุณ — ทักษะที่ทั้งชีวิตถูกจัดระเบียบไว้รอบมัน — หนังสือเล่มนี้จะไม่เกลี้ยกล่อมให้คุณเลิกสแนบ นักเขียนโปรแกรมฮิวริสติกที่เก่งที่สุดในโลกถูกเอาชนะในสิ่งที่พวกเขาสร้างชีวิตขึ้นรอบมัน ต่อหน้าสาธารณะ สิบสองเดือนหลังชั่วโมงที่งดงามที่สุดของแชมป์ฝั่งพวกเขา นั่นคือของจริง และมันไม่ใช่จุดจบของการวิเคราะห์: สิ่งที่เรารักในทักษะเหล่านี้แทบไม่เคยเป็นส่วนที่ตรวจสอบได้ และส่วนที่ตรวจสอบได้คือทั้งหมดที่ร่วงไป บทถัดไปทำข้อกล่าวอ้างนี้ให้เที่ยงตรง

ดังนั้น ไทโรอาจฉบับผู้อ่าน — สามคำถามที่ควรยิงใส่งานใดก็ตาม รวมถึงงานที่คุณรับเงินทำ ✦:

1. งานนั้นขึ้นอยู่กับที่ขณะคุณทำมันหรือเปล่า?
2. เป้าหมายถูกยื่นมาให้ ระบุครบถ้วนแล้วหรือเปล่า?
3. เครื่องจักรตรวจคำตอบได้ด้วยเงินหลักสตางค์หรือเปล่า?

สามคำตอบ "ใช่" คือโปรไฟล์ของทุกสิ่งที่ร่วงภายในกลางปี 2026 ทุกคำตอบ "ไม่" คือคู่มือ — และคู่มือ จำไว้ ไม่ใช่กำแพง มันคือผืนดินที่ยังป้องกันได้ トラบที่คุณยืนอยู่บนมันและลงมือทำงาน

คู่มือคือเรื่องถัดไป

แหล่งอ้างอิง

เข้าถึงทั้งหมดเมื่อ 16 กรกฎาคม 2026 รายการจากสื่อและตัวรวบรวมถูกระบุกำกับไว้ โปรดปฏิบัติตามตัวเลขของพวกมันด้วยระดับความมั่นใจตามที่ระบุในตัวบท

- ARC Prize Foundation — ARC-AGI-2 specification and human calibration: arcprize.org/arc-agi/2
- ARC Prize 2025 results and analysis (December 2025): arcprize.org/blog/arc-prize-2025-results-analysis · technical report: arxiv.org/html/2601.10904v1
- ARC-AGI-2 frontier score ~85%, GPT-5.5 (July 2026) — aggregator, secondary: benchlm.ai/benchmarks/arcAgi2
- AtCoder World Tour Finals 2026 sweep, 8,300 vs 4,300 (July 9, 2026) — press: the-decoder.com/openais-ai-beats-every-human-at-atcoder-a-top-competitive-programming-contest/
- International Mathematical Olympiad 2026, Shanghai (July 10–21, 2026): imo-official.org/editions/2026/
- Erdős problems settled and conjecture disproved (announced 2026) — press: scientificamerican.com/article/ai-uncovers-solutions-to-erdos-problems-moving-closer-to-transforming-math/
- Harvard/Beth Israel Deaconess emergency-diagnosis study (April–May 2026) — press: fortune.com/2026/05/04/harvard-study-ai-outdiagnose-doctors-openai-o1-preview/
- Humanity's Last Exam leaderboard (July 2026) — aggregator, secondary: llm-stats.com/benchmarks/humanity-s-last-exam
- Conversational persuasiveness of personalized GPT-4, Nature Human Behaviour (May 2025): nature.com/articles/s41562-025-02194-6
- Higher-order theory of mind, Frontiers in Human Neuroscience (2025): frontiersin.org/journals/human-neuroscience/articles/10.3389/fnhum.2025.1633272/full
- DialToM (2026): arxiv.org/pdf/2604.20443
- Fine-tuned AI writing versus MFA-trained experts, CHI (April 2026): dl.acm.org/doi/10.1145/3772318.3791276
- Isomorphic Labs first-in-human AI-designed drug trials (2026) — press: mlq.ai/news/isomorphic-labs-launches-human-trials-for-ai-designed-drugs/
- Waymo Safety Impact, 220.6M rider-only miles (March 2026): waymo.com/safety/impact/

บทที่ 13

คู่มือ

ทุกอย่างในบทที่แล้วร่วงหล่นภายในเวลารวบยี่สิบเดือน จะเปิดบทนี้ด้วยการเตรียมใจรับรางวัลพลบใจก็เข้าใจได้ — ความสบายใจนุ่มนวลชนิดพิสูจน์ไม่ได้ ว่าด้วยความคิดสร้างสรรค์และสัมผัสมนุษย์ ที่อัดแน่นอยู่ในหนังสือแผนสนามบินว่าด้วยหัวข้อนี้

บทนี้ไม่มีของแบบนั้นให้เลย เพราะมันถูกเรียบเรียงขึ้นใต้กติกาต้านโรแมนติก: แต้มนุชย์ทุกข้อข้างล่างถูกโจมตีก่อนจึงถูกรับเข้ามา ผู้สมัครแต่ละรายถูกไล่ล่าหาหลักฐานฝังค่าน ถูกลงวันที่ และ — ตรงไหนที่หลักฐานชี้ไปอีกทาง — ถูกลดชั้นไปอยู่บทที่ 12 หรือ 14 สิ่งที่รอดจากการล่าคือรายการที่สั้น เฉพาะเจาะจง และถูกป้องกันไว้แน่นหนากว่าฉบับชาวบ้านหลายขุม

แท็ก **DURABLE** ที่นี่หมายความว่า: บนหลักฐาน ณ กรกฎาคม 2026 แต้มนุชย์ห้าปีคือเดิมพันที่แตกต่างได้ แตกต่างได้ — ไม่ใช่รับประกัน ไม่ใช่ศักดิ์สิทธิ์ ห้าคู่มือผ่านเกณฑ์ จากนั้นคือการพลิกกลับ: ผลลัพธ์เรื่องรสนิยมผู้เชี่ยวชาญที่บทนี้ปฏิเสธจะทำให้นุ่มลง เพราะคู่มือจะน่าเชื่อถือต่อเมื่อความพ่ายแพ้ถูกคิดบัญชีเต็มราคา

#	คู่มือ	หลักฐานแบกน้ำหนัก พร้อมวันที่
1	โลกสู่กลับ DURABLE	โมเดลวิดีโอเดาสุ่มบนฟิสิกส์ที่เป็นไปไม่ได้ มนุษย์ >95% (IntPhys 2, Meta, 2025)
2	ยีสืวัตต์ DURABLE	<100M คำภายในอายุ 13 เทียบกับมากกว่านั้น 1,000–10,000x; ~20 W เทียบแคมปัส 100–750 MW (2026)
3	การเรียนรู้ที่เกาะติด DURABLE	continual learning ถูกยกให้เป็นความสามารถขาดหายอันดับ #1 โดยฉันทมติ (2026)
4	รู้ว่าตัวเองไม่รู้ DURABLE	ไร้อภิปัญญาระดับปัจเจก (2026); 1,313 คดีในศาลจากการแต่งเรื่องของ AI ภายในเมษายน 2026
5	ลายเซ็น DURABLE	

คู่มือที่ 1 — โลกสู่กลับ DURABLE

เริ่มจากการวัดที่สะอาดที่สุด เบนซ์มาร์ก IntPhys 2 ของ Meta (2025) แสดงให้เห็น
โมเดลวิดีโอตัดสินใจเหตุการณ์ที่เป็นไปไม่ได้ทางฟิสิกส์ — ชนิดที่ละเมิดความคงอยู่ของ
วัตถุ ความทึบตัน ความต่อเนื่อง — ที่ระดับเดาสุ่ม ราว 50–60% มนุษย์ทำได้เกิน 95%
๕๕ ฟิสิกส์ที่เด็กหนึ่งขวบบังคับใช้ได้ก่อนจะได้ภาษาแม้แต่คำเดียว ณ 2025–26 ยังขาด
หายจากระบบที่เขียนโคลงกลอนพอฟังได้ นี่คือนิพจน์ของ Moravec — ของยากกลับ
ง่าย ของง่ายกลับยาก — และยังคงเป็นแต้มต่อมนุษย์ที่หลักฐานหนุนหลังดีที่สุดในบัญชี
ฝังฮาร์ดแวร์เล่าเรื่องเดียวกันโดยมีเงินแนบมาด้วย ความคล่องแคล่วของหุ่นยนต์ขยับ
จริง: หุ่น NEO ของ 1X มากับมือขับเคลื่อนด้วยเอ็น 22 องศาอิสระ; โมเดลรากฐาน $\pi 0.7$
ของ Physical Intelligence (เมษายน 2026) พับผ้าและประกอบกล่องได้; สาย $\pi * 0.6$
ของบริษัทเดียวกันเรียนจาก reinforcement ในโลกจริง กระนั้น วรรณกรรมเทคนิคปี
2026 ปีเดียวกันก็ยังเรียกวงการนี้ว่า "ห่างไกลจากความสามารถมนุษย์อีกมาก"
(Construction Physics, 2026; การโต้แย้งต่อเนื่องใน Science Robotics, 2026) ตัวเลข
การประจำการเห็นพ้อง: หุ่น 02 ของ Figure สะสมชั่วโมงทำงานราว 1,250 ชั่วโมงตลอด
สัปดาห์เดือนที่โรงงาน BMW; Tesla ผลิตเป้าการผลิตรุ่น Optimus ปี 2025 ไปราว 90%
โดย Musk ยอมรับใน earnings call ไตรมาส 4 ปี 2025 ว่าหุ่น "ยังไม่ได้ทำงานที่มี
ประโยชน์"; การประเมินที่น่าเชื่อถือวางจำนวนหุ่นมนุษย์อัตโนมัติที่ผลิตงานได้จริงทั่ว
โลกไว้ที่หลักร้อยถึงพันต้นๆ ภายในสิ้นปี 2026 ไม่ใช่ศูนย์ แต่ก็ไม่ใช่กำลังแรงงาน

เหตุที่คู่มือนี้ยืนอยู่ได้ ว่ากันเชิงกลไก ☸: เหตุผลเชิงโครงสร้างสองข้อ ไม่ใช่ความหวัง
ลมๆ ข้อเดียว ฮาร์ดแวร์รอบพัฒนามานานเวลากายภาพ — กริปเปอร์ที่เพิ่งจะแพตช์คืนนี้
แล้วส่งให้ผู้ใช้ล้านคนพุงนี้ไม่ได้ และข้อมูลฝึกเชิงกายภาพนั้นหายาก: ไม่มีอินเทอร์เน็ต
ของการสัมผัส วงการเรียกสิ่งนี้ว่ากำแพงข้อมูลกายภาพ (physical data wall) ข้อความ
ร่วกก่อนเพราะข้อความหลายศตวรรษถูกกักไว้แล้ว ตัดป้ายแล้ว และตรวจได้ในราคาถูก
ส่วนโลกยื่นข้อมูลให้ทีละหนึ่งการหยิบจับ

ที่นี้ช้อยกเว้นที่ต้องพูดอย่างซื่อสัตย์ เพราะคู่มือนี้มีรูปโหวที่มีโลโก้บริษัทแปะอยู่ ฟลิตไรค์คนขับของ Waymo ผ่านหลัก 220.6 ล้านไมล์แบบผู้โดยสารล้วนภายในมีนาคม 2026 พร้อมอุบัติเหตุบาดเจ็บสาหัสน้อยกว่าคนขับมนุษย์จับคู่เทียบ 91% ๕๕ — ในโดเมนที่ถูกบีบให้แคบด้วยวิศวกรรมศาสตร์ แผนที่ความละเอียดสูง และการเก็บข้อมูลแบบอุตสาหกรรมมาร่วมทศวรรษ ถึงอย่างนั้นทางยาวก็ยังคง: รถโรงเรียนจอดนิ่งและไฟจราจรดับผลิตความล้มเหลวตลอด 2025–26 กฎที่ช้อยกเว้นสอนไว้ ✦: ที่ไหนโดเมนกายภาพถูกล้อมรั้วทำแผนที่ และทำฟาร์มข้อมูลได้ ที่นั่นรุ่งเหมือนเบนซ์มาร์ก สิ่งที่ยืนอยู่คือโลกเปิด — ห้องครัวที่ไม่คุ้นเคย ไซตงานรกรๆ งานที่ไม่มีใครล้อมรั้วเตรียมไว้ล่วงหน้า สามัญสำนึกเชิงกายภาพแบบอเนกประสงค์คือเดิมพันห้าปีที่แก้ต่างได้ ณ กรกฎาคม 2026 แต่เดิมพันห้าปีบนเสี้ยวใดเสี้ยวหนึ่งที่ถูกล้อมรั้วได้ ไม่ใช่

คู่มือที่ 2 — ยี่สิบวัตต์กับร้อยล้านคำ DURABLE

สองตัวเลข และไม่มีตัวไหนขยับ แม้ผ่านหลายปีของความพยายามทუნนา

หนึ่ง: เด็กคนหนึ่งไต่ยืนไม่ถึง 100 ล้านคำภายในอายุสิบสาม โมเดลภาษาแนวหน้าฝึกบนข้อมูลมากกว่านั้นสามถึงสี่อันดับของขนาด — หนึ่งพันถึงหนึ่งหมื่นเท่าของประสิทธิภาพทางภาษา — และยังคงจำเป็นต้องใช้มัน (BabyLM 2026 call for papers) โครงการทำทนาย BabyLM ใช้เวลาสี่ปีไล่ล่าเทคนิคฝึกที่จะปิดช่องว่างที่สเกลของเด็ก ผลลัพธ์ช่วยให้ได้ทีสเกลเล็ก และเข้าใกล้ประสิทธิภาพเชิงตัวอย่างของเด็กบนการเรียนรู้ปลายเปิดเลยแม้แต่น้อย ๕๕

สอง: สมองวิงบนไฟราว 20 วัตต์ เมื่อคิดต่อวัตต์ การประเมินที่ตีพิมพ์แล้ววางการรับรู้เชิงชีวภาพไว้ระหว่างพันถึงล้านเท่าของประสิทธิภาพฮาร์ดแวร์ AI ปัจจุบัน ขณะเดียวกันแคมป์ AI แห่งเดียวดังไฟ 100–750 เมกะวัตต์ (2026) — ตัวเลขข้างบนสุดคือการเผาผลาญขณะพักของสมองมนุษย์หลายสิบล้านสมอง — และกำลังผลิต AI ใหม่กว่า 10 กิกะวัตต์ถูกประกาศในปี 2025 เพียงปีเดียว

อ่านสองตัวเลขนี้คู่กันแล้วประเด็นจะคมขึ้น ๕๖: ช่องว่างนี้เป็นเรื่องสถาปัตยกรรม ไม่ใช่เรื่องสเกล เพราะสเกลดิบๆ คือสิ่งที่ช่องว่างนี้วัดอยู่พอดี ทุกกิกะวัตต์ที่เพิ่มเข้ามายิ่งถ่างมัน อะไรก็ตามที่สมองทำเพื่อดึงโครงสร้างลึอกจากข้อมูลบางเบา ยังไม่ถูกจำลองสำเร็จ และไม่ใช่เพราะขาดงบประมาณ

หนึ่งข้อแม้ที่ข้อสัต์ การเรียนในบริบท (in-context learning) — ตัวอย่างไม่กี่ชุดที่โชว์อยู่ในพรอมต์ — หดช่องว่างเชิงปฏิบัติสำหรับงานตรงหน้า และมันได้ผลจริง แต่มันระเหยไปเมื่อเซสชันจบ การเรียนรู้ถาวรแบบ few-shot ยังไม่มีอยู่จริง ณ กรกฎาคม 2026 ความแตกต่างข้อนั้นเป็นคู่มือในสิทธิ์ของตัวเอง และมันได้หัวข้อถัดไปไปครอง

เหตุที่เรื่องนี้ควรอยู่ในหนังสือปริศนา: การเรียนรู้แบบประหยัดตัวอย่างคือนิสัยของนักปริศนา เชือกเส้นเดียว ขนวนเส้นเดียว เฉลยหนึ่งข้อที่ย่อยมาดีแล้ว กลายเป็นท่าที่คุณครอบครองไปตลอดชีวิต ประสิทธิภาพแบบนั้น — ตัวอย่างเดียวแปลงร่างเป็นทักษะถาวร — คือสิ่งที่ภาค II และ III ฝึกอยู่เป๊ะๆ ที่ละปริศนา

คู่มือที่ 3 — การเรียนรู้ที่เกาะติด DURABLE

ลองถามตัวเองในปี 2026 ว่าความสามารถข้อเดียวข้อไหนที่ขาดหายอย่างเด่นชัดที่สุด แล้วคำตอบจะสม่าเสมอผิดปกติ: การเรียนรู้ต่อเนื่อง (continual learning) มันขึ้นพาดหัว "AGI's Last Bottlenecks" (AI Frontiers, 2026); มันคือเหตุผลที่ Karpathy เรียกคุณนี้ว่า "ทศวรรษของเอเจนต์" ไม่ใช่ปีของเอเจนต์ (2025); มันเป็นเชื้อเพลิงของวงถกเถียง "continual-learning overhang" (2026) ๕ ภาพเชิงคลินิกที่วงการใช้กันเอง: โมเดลตื่นขึ้นมาพร้อมภาวะเสียความจำแบบไปข้างหน้า (anterograde amnesia)

ในทางปฏิบัติมันแปลว่าอย่างนี้ ทุกสิ่งที่โมเดลเรียนรู้ภายในเซสชัน — คำแก้ไขของคุณ การค้นพบของมันเอง บั๊กที่ในที่สุดมันก็เข้าใจ — ระเหยไปเมื่อเซสชันจบ เพื่อนร่วมงานที่ปราดเปรื่องเมื่อวาน มาถึงวันนี้โดยไม่เคยพบคุณมาก่อน ทุกเช้าคือเช้าแรกเสมอ

ทางเลียงมีอยู่จริง และมันไม่ใช่การเรียนรู้ ๖ เอเจนต์ถาวรเก็บความจำภายนอก — ไฟล์วิกิ โน้ตถึงตัวเอง คลัง retrieval — และของพวกนี้ช่วยได้แบบเดียวกับที่สมุดโน้ตของคนแปลกหน้าช่วยคนแปลกหน้าคนถัดไปที่รับมรดกมัน: ทักษะไม่เคยย้ายเข้าไปอยู่ในตัวระบบ มันนั่งอยู่ในไฟล์ที่เซสชันถัดไปอาจอ่าน หรืออ่านผิด ก็ได้ทั้งนั้น ขณะเดียวกัน ปัญหาภาพกระจกกลับด้านก็เริ่มออกเขียวระดับโปรดักชัน: การลืมแบบหายนะ (catastrophic forgetting) — ฝึกของใหม่ ทำของเก่าพัง — กลายเป็นอาการปวดหัวของวิศวกรหน้างานใน 2025–26 เมื่อเอเจนต์กลายเป็นบริการที่รันถาวร ๗

เทียบกับทั้งหมดนี้ เส้นฐานของมนุษย์แทบไม่ต้องแปลง: ทักษะทบทวนข้ามทศวรรษ บทสนทนาครั้งที่หนึ่งหมื่นของคุณหล่อเลี้ยงครั้งที่หนึ่งหมื่นเอ็ด ผู้อ่านที่ซึมซับทำคิตของหนังสือเล่มนี้ในปี 2026 จะยังครอบครองมันอยู่ในปี 2046 โดยไม่ต้องมีคลัง retrieval ใดๆ บทที่ 15 สร้างตรงบนความไม่สมมาตรนี้ — สมุดบันทึกพลาด, upsolving (แก้ซ้ำหลังรู้แพ้), การทบทวนวันระยะ — เพราะผู้เรียนแบบทบทวนควรลงทุนตรงที่การทบทวนให้ดอกผล

แต่ก็ต้องให้เกรดมันอย่างซื่อสัตย์ นี่คือการวิจัยที่ถูกโจมตีหนักที่สุดเท่าเดียวในวงการ AI Δ : หุ่นยนต์เรียนจากประสบการณ์โลกจริงในฉากแคบๆ ได้แล้ว ($\pi 0.6$, 2026) และแรงจูงใจในการเจาะกรณีทั่วไปวัดกันเป็นล้านล้านดอลลาร์ **DURABLE** ตรงนี้ถูกหมดไว้กับสถาปัตยกรรมของวันนี้* และวันนี้มีวันที่กำกับ: กรกฎาคม 2026 ถ้าจะมีคู่มือสักแห่งในบทนี้ร่ว่งให้กับการเปลี่ยนสถาปัตยกรรม แทนที่จะร่ว่งให้กับสเกล คาดหมายได้เลยว่าคือแห่งนี้

คู่มือที่ 4 — รู้ว่าตัวเองไม่รู้ **DURABLE**

เริ่มจากส่วนที่กำลังถูกกัดเซาะก่อน เพื่อให้ส่วนที่ทนทานสมควรได้รับความเชื่อของคุณ อัตราความผิดพลาดดิบกำลังทรุดฮวบ อาการแต่งเรื่อง (hallucination) ในการสรุปแบบมีหลักยึด: 3–8% ในปี 2023 ลงมาเหลือ 1.0–2.5% ภายในปี 2026 (ตัวเลข HHEM) ความผิดพลาดด้านความเชื่อตรงต่อแหล่งในระบบ retrieval-augmented: 4–9% ความผิดข้อเท็จจริงแบบปิดตำราแบบทดสอบสั้ล SimpleQA: ราว 4–10% สำหรับโมเดลแนวหน้า โดยโหมดคิดยาวลดความผิดพลาดครึ่งหนึ่ง (เมษายน 2026; ตัวเลขตัวรวบรวม) Δ กระดาษของ OpenAI เดือนกันยายน 2025 "Why Language Models Hallucinate" เสนอว่ารากเหง้าคือแรงจูงใจของเบนซ์มาร์กที่ให้รางวัลการเดามากกว่าการงดตอบ — ข้อโต้แย้งที่ว่าปรากฏการณ์นี้ทั้งยวงแก้ไขได้ Δ ใครที่กำลังสร้างคู่มือมนุษย์จากอัตราความผิดพลาดของ AI กำลังสร้างบ้านบนทราย และหนังสือเล่มนี้ขอไม่ร่วมด้วย

คู่มือนี้ยังอยู่ลึกลงไปอีกหนึ่งชั้น และมันไม่ขยับ งานศึกษาตลอดจนถึงปี 2026 พบว่าโมเดลภาษาไม่แสดงสัญญาณของอภิปัญญาระดับปัจเจก (individuated metacognition) Σ : ความมั่นใจที่โมเดลแถลงไม่ได้ตามรอยสิ่งที่โมเดลตัวนั้นๆ รู้จริง

และความเต็มใจจะพูดว่า "ไม่รู้" กลายเป็นสิ่งประดิษฐ์ของพรอมต์ — เปลี่ยนถ้อยคำของตัวเลือก "Unknown" แล้วอัตราการงตอบก็เลื่อนตาม เป็นอคติที่โมเดลตรวจจับในตัวเองไม่ได้ (arXiv, 2026) โมเดลถูกพรอมต์ให้แสดงความสงสัยได้ แต่มันไม่ได้มีความสงสัย ❖ ความต่างนี้ฟังดูเป็นปรัชญา จนกระทั่งวันที่มันเจอห้องพิจารณาคดี

นั้นก็ไปพบห้องพิจารณาคดีกัน ภายในเมษายน 2026 ตัวติดตามที่เดินเครื่องอยู่ตัวหนึ่งนับได้ 1,313 กระบวนพิจารณาในศาลที่มีเนื้อหาถูกขึ้นโดย AI — คดีที่ประดิษฐ์ขึ้น การอ้างอิงผิด — 496 รายการในนั้นเกี่ยวพันนายความมีใบอนุญาต ๕ ศาลสหรัฐฯ ส่งลงโทษเป็นเงินกว่า \$145,000 ภายในไตรมาสแรกของปี 2026 ไตรมาสเดียว Nebraska ส่งมอบการพักใช้ใบอนุญาตนายความแบบไม่มีกำหนดครั้งแรก จากคำคู่ความที่ AI ขู้นักแสดงกายวิภาคของความล้มเหลวพวกนี้ให้ดู: ไม่มีอะไรพิสดารเลย มีอาชีพคนหนึ่งถามคำถามใส่ระบบที่พูดคล่อง ได้คำตอบที่คล่องแคล่วกลับมา แล้วลงนาม

เศรษฐศาสตร์ลงจอดตรงจุดเดียวกับแนวคำพิพากษาเป๊ะ ❖ เมื่อการสร้างเนื้อหาแทบจะฟรี การทวนสอบกลายเป็นวัตถุประสงค์ที่หายาก ความสงสัยที่ผ่านการสอบเทียบ — รู้ว่าคำตอบไหนของตัวเองสมควรถูกเช็ค และพูดว่า "ไม่รู้" ในจังหวะที่ถูกด้วยเหตุผลที่ถูก — คืองานฝีมือของมนุษย์ ณ กรกฎาคม 2026 และมันเป็นงานฝีมือที่ฝึกได้ด้วย ภาค V จะเคี้ยวมัน

จดจำรูปทรงของคู่มือนี้ไว้ให้ดี แกนอภิปัญญาของมันทนทาน ขณะกำแพงชั้นนอก — ความแม่นยำดิบ — สึกกร่อนลงทุกไตรมาส อย่าถอดความหัวข้อนี้เป็น "AI ชอบแต่งเรื่อง" มันแต่งเรื่องน้อยลงทุกปี แต่มันยังคงไม่รู้ตัวว่ากำลังแต่งอยู่เมื่อไร

คู่มือที่ 5 — ลายเซ็น DURABLE

การพักใบอนุญาตที่ Nebraska ขึ้นไปยังบางสิ่งที่ใหญ่กว่าอัตราความผิดพลาด: ต้องมีใครสักคนเป็นคนที่ยืนยัน

หลักที่ตกผลึกจากคลื่นบลงโทษปี 2026 นั้นที่ตรง: ลายเซ็น "ก่อนการรับผิดชอบเนื้อหาของมัน ไม่ว่าใครเป็นผู้ร่าง" ๕ ศาลไม่ได้ถามว่าเครื่องจักรฉลาดหรือไม่ ศาลถามว่าใครลงนาม ตั้งแต่สิงหาคม 2026 หน้าที่กำกับดูแลโดยมนุษย์ตาม EU AI Act สำหรับระบบความเสี่ยงสูง เขียนการมอบหมายเดียวกันนี้ลงเป็นลายลักษณ์อักษรในกฎหมาย การะรับผิดชอบ กลายเป็นว่า ไม่ใช่ความสามารถทางปัญญาที่เครื่องจักรขาดและอาจได้มาสัก

วัน มันคือบทบาทที่สถาบันมอบหมายให้แก่ตัวตนที่ถูกกลโหม ถูกถอนใบอนุญาต ถูกฟ้อง และถูกประจานได้ ❖ ไม่มีเบนซ์มาร์กให้ไต่ เพราะมันไม่ใช่สมรรถนะ — มันคือตำแหน่ง ทนทานโดยตัวการก่อสร้างเอง

ความเป็นเจ้าของเป้าหมายคือคู่มือเดียวกันเมื่อมองจากด้านหน้า บทปริทัศน์ว่าด้วย "นักวิทยาศาสตร์ AI" เชิงเอเจนต์ในปี 2026 พบว่าการประจำการวิ้งแบบเทคโนโลยี ผลักดัน: ระบบลงมือทำได้ย่างน่าประทับใจ ขณะที่การเลือกปัญหา กลยุทธ์ระดับสูง และมาตรฐานการพิสูจน์ยังถูกกำหนดโดยมนุษย์ ๕๖ (บทปริทัศน์และกรณีศึกษาบน arXiv, 2026) แบบแผนจากคณิตศาสตร์ของบทที่ 12 ซ้ำรอยทุกหนแห่ง: เครื่องจักรให้ เทคนิค มนุษย์ตัดสินว่าจะไรควรค่าแก่การพิสูจน์ และอะไรนับว่าพิสูจน์แล้ว

แต่จบบันทีกการกัดเซาะเต็มราคาด้วย ตัวตัดสินที่ฝักบนคูปบทความจับคู่การอ้างอิง 700,000 คู่ สามารถเรียนบางอย่างที่ประพติตัวเหมือนรสนิยมทางวิทยาศาสตร์ได้ (มีนาคม 2026) และแล็บแนวหน้าแห่งหนึ่งรายงานไว้ในเซสชันวิจัยจริง ขึ้นถัดไปที่ โมเดลของตนเสนอ ชนะข้อเสนอของนักวิจัยมนุษย์ราวครึ่งหนึ่งของครั้งแล้ว (2026; รายงานทฤษฎี ความมั่นใจ ~75%) △ การเสนอขึ้นถัดไปไม่ใช้การเลือกภูเขา แต่ระยะห่างระหว่างสองสิ่งนั้นสั้นกว่าที่ฟังดู และย่อหน้านี้อาจแก่เร็ว

สองสิ่งยังอยู่กับที่ถึงกระนั้น หนึ่งใน การให้เหตุผลทางสังคมตามแนวยาวของเวลา: โมเดล ผ่านแบบทดสอบสภาวะจิตแบบสถิติ (บทที่ 12) แต่ล้มเหลวที่จะปรับพฤติกรรมของ ตัวเองเข้าหาจิตใจดวงหนึ่งที่ติดตามข้ามเวลา (DialToM, 2026) ๕๗ สอง และลึกกว่านั้น: การอยาก ระบบหนึ่งหาค่าเหมาะสุดให้เป้าหมายที่ถูกยื่นมาให้ได้ แต่ ณ กรกฎาคม 2026 ไม่มีอะไรเป็นเดิมพันสำหรับตัวระบบเอง มันถูกไล่ออกไม่ได้ ล้มละลายไม่ได้ อับอายไม่ได้ ภูมิใจไม่ได้ skin in the game ตรงนี้ไม่ใช่อุปมา — มันคือกลไกที่โครงสร้างภาระ รับผิดชอบทั้งระบบวิ้งอยู่บนมัน ❖ สิทธิที่จะเป็นผู้ตัดสินใจ และพันธะที่ต้องตอบคำถาม แทนการตัดสินใจนั้น เป็นการผูกขาดของมนุษย์ ไม่ใช่เพราะเครื่องจักรที่มึน แต่เพราะ สถาบันถูกสร้างขึ้นจากผลสืบเนื่อง

การพลิกกลับ — รสนิยมผู้เชี่ยวชาญกับแปดสิบเอ็ดดอลลาร์

บทนี้ติดค้างคุณอยู่หนึ่งเรื่องที่ต้องเล่าเต็มกำลัง เพราะมันคือเรื่องที่ทำให้งุ่มง่ามได้ง่าย ที่สุด

จากตั้งต้น (CHI, ตีพิมพ์เมษายน 2026): นักเขียนที่ผ่านหลักสูตร MFA ยี่สิบแปดคน — คนที่อาชีพของพวกเขาคือการแยกร้อยแก้วขั้นต้อออกจากชั้นเกือบดี — ตัดสินข้อเขียนจากโมเดลภาษาที่เลียนแบบนักเขียนมีชื่อห้าสิบคน ภายใต้การปรอมนต์แบบธรรมดา ผู้เชี่ยวชาญเลือกร้อยแก้วฝีมือมนุษย์ 82.7% ของครั้ง คู่มือยืนอยู่ ตามแบบผู้รู้จริงยังแยกออก

จากนั้นนักวิจัยใช้เงินราว \$81 fine-tune โมเดลบนคลังงานเขียนจริงของนักเขียน ความชอบของผู้เชี่ยวชาญพลิกกลับ: 62% เทให้เครื่องจักร ส่วนผู้อ่านทั่วไปน่าจะชอบเครื่องจักรมาตั้งแต่ต้น ในทั้งสองเงื่อนไข บันทึก debrief ของงานศึกษาจดคำว่า "วิกฤตอัตลักษณ์" ของเหล่าผู้เชี่ยวชาญไว้ แรงงานมนุษย์ที่ถูกเลียนแบบถูกประเมินไว้ที่ราว \$25,000 ของเวลาเขียน การพลิกใช้เงินแปดสิบเอ็ดดอลลาร์ ๕๕

พูดส่วนที่กวนใจออกมาตรงๆ เพราะการสร้างเป็นอื่นจะวางยาพิษบพที่เหลือทั้งบท รสนิยมผู้เชี่ยวชาญ เมื่อเล็งใส่งานคุณภาพระดับปกติ ควรจะลึก — วิจารณ์ญาณสั่งสมฝังเนื้อฝังตัวของทั้งอาชีพ แต่ในฐานะเครื่องตรวจจับ มันถูกตีแตกด้วยเงินเท่าอาหารค่ำมื้อดีๆ มื้อหนึ่ง และผู้เชี่ยวชาญไม่ได้แค่จับเครื่องจักรไม่ได้ พวกเขาชอบมันมากกว่า ถ้าแต่มีต่อทางวิชาชีพของใครสรุปลงได้แค่ "ฉันแยกของดีจากของเกือบต้อออก" แต่มีต่อมันไม่ใช่คู่มือ มันคือรอบ fine-tuning ที่ยังไม่ได้เกิดขึ้นเท่านั้นเอง

และเรื่องนี้ไม่ได้จำกัดอยู่ที่ร้อยแก้ว GDPval ของ OpenAI (กันยายน 2025 อัปเดตต่อเนื่อง) ให้คะแนนชิ้นงานส่งมอบของโมเดลแนวหน้าว่าเท่ากับหรือดีกว่าของมืออาชีพที่ประสบการณ์เฉลี่ยสิบสี่ปี บรรดาครึ่งหนึ่งของ 220 งานอาชีพจริง — เร็วกว่าและถูกกว่า ราวร้อยเท่า

ที่นี่ สิ่งที่รอด — เพราะมีบางอย่างรอดจริง และมันมีหลักฐานหนักแน่นกว่าสิ่งที่ร่วงไปเสียอีก

หางของการแจกแจง แอ่งงานเขียนของมนุษย์มีความหลากหลายเชิงความหมายมากกว่าแอ่งงานเขียนของโมเดล 2–8 เท่า และการกลายเป็นเนื้อเดียวกันนี้คงอยู่แม้ผ่านการแทรกแซงกระตุ้นความหลากหลายโดยจงใจ (Doshi & Hauser, Science Advances, 2024; ผลเพิ่มเติม 2025–26) ๕๕ โมเดลถดถอยเข้าหาศูนย์กลางของวัฒนธรรม ๕ — พวกมันคือเครื่องยนต์ของสิ่งที่คาดการณ์ได้ แทบจะโดยการก่อสร้างเลยทีเดียว ศูนย์กลางคือที่ที่พวกมันชนะมืออาชีพมัธยฐานไปแล้วพอดี แต่หางคือที่ที่แนวเขียนใหม่ ตลาดใหม่ และวิทยาศาสตร์ใหม่ถือกำเนิด และหางยังคงเป็นของมนุษย์ ณ ปี 2026 นัก

เขียนเครื่องจักรชิ้นเล็กหนึ่งตัวน่าประทับใจ แต่หนึ่งล้านตัวคือ — เมื่อรวมกันแล้ว — นักเขียนคนเดิมคนเดียว

การเลือก รสนิยมในฐานะการจำแนกแยกแยะร่วงไปแล้วที่ศูนย์กลาง รสนิยมในฐานะการคัดเลือก — ปัญหาไหนสมควรได้หนึ่งปีของคุณ มาตราฐานการพิสูจน์แบบไหนที่นับร่างไหนในบรรดาพันร่างที่พอใช้ได้ควรค่าแก่การเอาชื่อไปค้าประกัน — วังผ่านคูเมืองที่ 5 และหลักฐานปี 2026 ยังพบว่ามันถูกกำหนดโดยมนุษย์ ๕๖

หนึ่งคำเตือนกับหนึ่งคำสั่ง คำเตือน: รสนิยมนอกกรอบทันทานอยู่ได้ส่วนหนึ่งเพราะยังไม่มีใครสร้างเบนซ์มาร์กให้มัน และการถูกคุมครองด้วยความวัดไม่ได้ เป็นความปลอดภัยชนิดที่อ่อนแอกว่าการถูกคุมครองด้วยหลักฐาน Δ — จงคาดหมายว่าหัวข้อนี้จะถูก stress-test ก่อนหัวข้ออื่นๆ ส่วนคำสั่ง สำหรับใครก็ตามที่งานของเขาคือวิจารณ์ญาณ: จงย้ายคุณค่าของคุณออกจากศูนย์กลาง ✦ การจำแนกระดับมัธยมกำลังร่วง ความแปลกประหลาด การคัดเลือก และความเต็มใจที่จะลงนาม ยังไม่ร่วง — ณ กรกฎาคม 2026

สิ่งที่คูเมืองมีร่วมกัน

ถอยออกมามองหาคูเมืองกับการพลิกกลับ แล้วบัญชีผู้ร่วงของบทที่ 12 จะอ่านราวกับฟิล์มเนกาทีฟของบทนี้

สิ่งที่ร่วงคือสิ่งสถิต ระบุครบถ้วน และตรวจได้ในราคาถูก สิ่งที่ยืนอยู่คือชั่วตรงข้ามในทุกพิภพ: โลกที่สั่นคลอนกลางคัน (คูเมือง 1); การเรียนรู้ที่ทบทวนแทนที่จะระเหย (คูเมือง 2 กับ 3); ความสงสัยที่ถูกครอบครองจริง ไม่ใช่ถูกแสดง (คูเมือง 4); เป้าหมายที่ถูกเลือกเอง และลงนามรับ (คูเมือง 5); ทางแทนที่จะเป็นศูนย์กลาง (ผู้รอดจากการพลิก) เครื่องจักรพิชิตลูปปิดไปแล้ว ๕ คูเมืองทุกแห่งคือลูปเปิด — ไม่มีรั้วล้อมโลก ไม่มีเป้าหมายส่งลงมาให้ ไม่มีผู้ตรวจรับฟรี และผลสืบเนื่องตกลงบนตัวผู้ที่ลงมือ

ทั้งหมดนี้ไม่ใช่คำสัญญา บทที่ 12 แสดงให้เห็นแล้วว่าการร่วงมาฉับพลันและเป็นทางเดียว คูเมืองที่ 3 อยู่ใต้การบุกโจมตีโดยตรงจากความพยายามวิจัยทุนหนาที่สุดในประวัติศาสตร์ การพลิกเกิดขึ้นกับมืออาชีพที่มั่นใจไม่น้อยไปกว่าผู้อ่านหน้านี้คนใด สิ่งที่คูเมืองมอบให้ไม่ใช่ความปลอดภัย แต่คือทิศทาง: มันชี้ว่าตรงไหนที่ความพยายามของมนุษย์ยังทบทวน และภาค V เอาข้อมูลนั้นไปใช้จ่าย

ระหว่างผู้ที่ร่วกับผู้ที่ทนทาน มีแถบพื้นดินที่ไม่ใช่ทั้งสองอย่างทอดอยู่ — ตัวแนวน้ำเอง ที่ซึ่งแต้มต่อมีจริงและนาฬิกาของมันเปิดให้สาธารณะอ่าน นั่นคือบทถัดไป

แหล่งอ้างอิง

เข้าถึงทั้งหมดเมื่อ 16 กรกฎาคม 2026 รายการจากสื่อและตัวรวบรวมถูกรับกับไว้ โปรดปฏิบัติตามตัวเลขของพวกมันด้วยระดับความมั่นใจตามที่ระบุในตัวบท

- IntPhys 2, Meta (2025): arxiv.org/abs/2506.09849
- Robot dexterity assessment (2026) — press: construction-physics.com/p/robot-dexterity-still-seems-hard
- Humanoid deployment reality check, Q2 2026 — press: 1023jack.com/news/the-humanoid-robotics-reality-check-q2-2026-pilot-to-production-status/
- Waymo Safety Impact, 220.6M rider-only miles (March 2026): waymo.com/safety/impact/
- BabyLM 2026 call for papers (child data-efficiency gap): arxiv.org/abs/2602.20092
- AI Frontiers, "AGI's Last Bottlenecks" (2026): ai-frontiers.org/articles/agis-last-bottlenecks
- Karpathy on agent memory and the "decade of agents" (2025–26) — press: inovabeing.com/blog/karpathy-llm-wiki-ai-agent-memory-2026
- No individuated metacognition (2026): arxiv.org/pdf/2605.24299 · abstention as prompt artifact (2026): arxiv.org/pdf/2507.16199 and [arXiv 2604.17073](https://arxiv.org/abs/2604.17073)
- OpenAI, "Why Language Models Hallucinate" (September 2025) — cited by title; hallucination-rate figures from HHEM (2026) and aggregator data (April 2026), secondary
- Legal tracker of AI-fabricated content in court — 1,313 proceedings by April 2026: gc.ai/blog/ai-hallucination-legal-cases
- Fine-tuned AI writing versus MFA-trained experts, CHI (April 2026): dl.acm.org/doi/10.1145/3772318.3791276
- GDPval, OpenAI (September 2025): openai.com/index/gdpval/
- "AI Can Learn Scientific Taste" (March 2026): arxiv.org/abs/2603.14473
- Agentic AI scientists — deployment critique (2026): arxiv.org/pdf/2605.08956
- Homogenization of creative diversity: Doshi & Hauser, Science Advances (2024); replication and extension (2025): sciencedirect.com/science/article/pii/S294988212500091X
- DialToM (2026): arxiv.org/pdf/2604.20443

บทที่ 14

การไล่กวาด

บทที่ 12 นับผู้ที่ร่วง บทที่ 13 เดินสำรวจคูเมือง บทนี้รายงานจากแถบพื้นที่ระหว่างทั้งสอง: ความสามารถที่เต็มต่อมนุษย์มีจริง วัดได้ และกำลังลดลงบนนาฬิกาที่ใครก็อ่านได้ทุกอย่างในบทนี้ติดแท็ก **ERODING** — ซึ่งทำให้นี่คือบทที่มีโอกาสผิดมากที่สุดเมื่อถึงเวลาที่คุณอ่านมัน มันบอกไว้ตั้งแต่ต้น และมันถูกสร้างมาเพื่อถูกอัปเดต ไม่ใช่ถูกเชื่อ: วันที่กำกับทุกตัวเลข พิสัยแทนที่จะเป็นจุดเดียว และรายการเฝ้าดูท้ายบทที่ระบุชื่อเป๊ะๆ ว่าตัวเลขไหนต้องเอาไปเทียบกับโลก

จุดประสงค์ที่ลึกกว่านั้นคือตัววิธีการ ตัวเลขเกี่ยวกับ AI มาถึงมือเราในห่อของขวัญ — ห่อด้วยความตื่นเต้นของใครสักคน หรือความหวาดหวั่นของใครสักคน บทเรียนแท้จริงของบทนี้คือวิธีแกะห่อนั้น

นาฬิกา **ERODING**

ไม้บรรทัดชิ้นเดียวที่มีประโยชน์ที่สุดสำหรับการไล่กวาดครั้งนี้คือเมตริก time-horizon ของ METR และมันคุ้มค่าแก่การทำความเข้าใจก่อนหยิบไปอ้าง ☹️: เอาชุดภารกิจขนาดใหญ่ที่ความยากถูกสอบเทียบเป็นเวลาทำงานของมนุษย์ แล้วหาความยาวภารกิจที่โมเดลทำสำเร็จ 50% ของครั้ง ความยาวนั้นคือขอบฟ้า (horizon) ของโมเดล มันแปลง "มันฉลาดแค่ไหน?" — ซึ่งตอบไม่ได้ — ให้เป็น "คุณส่งงานยาวแค่ไหนให้มันได้?" — ซึ่งวัดได้

ค่าที่อ่านได้ จากแหล่งปฐมภูมิ งานศึกษาต้นฉบับของ METR (มีนาคม 2025) พบขอบฟ้าเพิ่มเป็นสองเท่าราวทุกเจ็ดเดือน ส่วนอัปเดต Time Horizon 1.1 (29 มกราคม 2026; 228 ภารกิจ) วางขอบฟ้าความสำเร็จ 50% ของ Claude Opus 4.5 ไว้ที่ 320 นาที — ราว 5.3 ชั่วโมง — พร้อมช่วงความมั่นใจ 170 ถึง 729 นาที และของ GPT-5 ที่ 214 นาที ๕๕ เวลาเพิ่มสองเท่าจากการ refit: 131 วันเมื่อวัดจากปี 2023 หรือ 89 วันเมื่อวัดจากปี 2024

สังเกตความซื่อสัตย์ที่อยู่ในตัวแหล่งปฐมภูมิเอง: ตัวเลขพาดหัว 5.3 ชั่วโมงมาถึงโดยห่อ ด้วยช่วงความมั่นใจที่วิ่งจากไม่ถึงสามชั่วโมงไปจนเกินสิบสอง ความกว้างนั้นไม่ใช่ความ สะเพร่า มันคือหน้าตาจริงของการวัดพรมแดนที่กำลังเคลื่อนที่ด้วยภารกิจ 228 ข้อ จงไม่ ไวใจตัวเลขนี้ฉบับมือสองที่อ้างจุดแล้วทั้งช่วง ✦

นั่งอยู่กับตัวเลขคู่นั้นสักครู่ ตัวเวลาเพิ่มสองเท่าเองก็หดลงระหว่างสองรายงาน — เส้น โค้งวิ่งแข่ง extrapolation ของตัวเองภายในสิบเดือน ไม่ว่าจะอะไรจะจริงอีก "เดี่ยวเทรนต์ก็ ชะลอไปเอง" เป็นฝั่งที่แพ้ของเดิมพันข้อนี้มาโดยตลอด

หนึ่งค่าอ่านจากแนวหน้าสุด ติดตรงตามน้ำหนักที่แท้จริงของมัน: รายงานหุติยภูมิ (data fit เดือนกุมภาพันธ์ 2026) วางโมเดลพรีวิวดือนมีนาคม 2026 ไวใกล้ขอบฟ้า 16 ชั่วโมง — แต่ค่านั้นนั่งอยู่ริมสุดของสิ่งที่ชุดภารกิจวัดได้เลยทีเดียว และ METR เองก็เตือนว่าค่า ประเมินเหนือ 16 ชั่วโมงไม่น่าเชื่อถือ เพราะมีเพียง 5 จาก 228 ภารกิจที่ยาวขนาดนั้น Δ (ความมั่นใจ $\sim 70\%$) เมื่อค่าอ่านนั่งอยู่ที่ยอดบนสุดของไม้บรรทัด จงสงสัยไม้บรรทัดก่อน

คำนวณให้จบ แล้วจงสงสัยผลลัพธ์

นี่คือ extrapolation ที่ทุกคนทำกันเงิบๆ ในใจ จงทำมันออกมาดั่งๆ แทน ด้วยปลายทั้ง สองข้างของพิสัยที่วัดได้ จุดยึด: 5.3 ชั่วโมง ณ 29 มกราคม 2026 สูตร: ขอบฟ้า = $5.3 \text{ h} \times 2^N$ (จำนวนวันที่ผ่านไป ÷ เวลาเพิ่มสองเท่า) สัปดาห์ทำงาน = 40 ชั่วโมง เดือนทำงาน ≈ 170 ปีทำงาน $\approx 2,000$

วันที่	ที่เวลาเพิ่มสองเท่า 131 วัน	ที่เวลาเพิ่มสองเท่า 89 วัน
มกราคม 2026 (วัดจริง)	5.3 h	5.3 h
มกราคม 2028 (+2 ปี)	$\approx 250 \text{ h}$ — หกสัปดาห์ทำงาน	$\approx 1,600 \text{ h}$ — เก้าเดือนทำงาน
มกราคม 2031 (+5 ปี)	$\approx 80,000 \text{ h}$ — อาชีพการงานสี่สิบปี	$\approx 8,000,000 \text{ h}$ — สี่พันปีทำงาน

อ่านแถวกลางก่อน หกสัปดาห์ทำงานคืองานที่ปรึกษาขึ้นจริงจัง เก้าเดือนทำงานคือ โครงการวิจัยที่มีทุนสนับสนุน แม้แต่ปลายอนุรักษ์นิยม อีกแค่สองปีข้างหน้า ก็กำลัง บรรยายการยื่นงานชนิดที่จัดโครงทั้งไตรมาสของมืออาชีพคนหนึ่งให้เครื่องจักร — ที่

ความน่าเชื่อถือระดับโยนเหรียญ บนภารกิจสะอาดแบบเบนซ์มาร์ก ถ้าเทรนด์ขึ้นระยะ ตัวขยายทั้งสามนั้นแบงงานจริงทุกตัว จงเก็บมันติดประโยชน์ไว้เสมอ

อ่านแถวล่างอีกครั้ง ดีความตามตัวอักษร มันบอกว่าโมเดลปี 2031 ทำสำเร็จ — ที่ความน่าเชื่อถือโยนเหรียญ — ภารกิจที่จะกินเวลามนุษย์คนหนึ่งหลายสหัสวรรษ แถวสองปีคือคำพยากรณ์ แถวห้าปีคือเครื่องเตือนใจว่า ที่ไหนสักแห่งระหว่างสองแถวนั้น ข้อสมมุติหยุดบรรยายโลกจริง ♦ เอ็กซ์โพเนนเชียลซื้อสัตย์กับระยะใกล้และแต่งเรื่องกับระยะใกล้ นั่นไม่ใช่คำหนิของเส้นโค้งเส้นนี้โดยเฉพาะ แต่คือคุณสมบัติของตัววิธีการ

สี่ข้อแก้ไขก่อนคุณจะทำอย่างแม้แต่แถวใกล้:

1. **ความน่าเชื่อถือ** ตัวเลขพวกนี้คือขอบฟ้าที่ความสำเร็จ 50% — โอกาสเท่าโยนเหรียญ ขอบฟ้าที่ความน่าเชื่อถือ 80% สั้นกว่าราวสี่เท่า: 3–4 ชั่วโมงสำหรับโมเดลที่ดีที่สุด ณ มกราคม 2026 ☼ ถ้าต้องการระดับ "พึงพาได้" จงหักออกราวสองรอบเพิ่มสองเท่าจากทุกช่องในตาราง
2. **เพดานของไม้บรรทัด** ชุดภารกิจโหม่งลงเหนือเส้น 16 ชั่วโมง (5 ภารกิจจาก 228) พันเส้นนั้นไป ตัวเครื่องมือวัด — ไม่จำเป็นว่าตัวปรากฏการณ์ — คือสิ่งที่หมดแรง ☼ จงรอชุดสืบทอดของ METR ก่อนจะไว้วางใจตัวเลขใดที่พันเส้นนั้น
3. **ภารกิจเบนซ์มาร์กสะอาดกว่างานจริง** ภารกิจในชุดจบในตัวเองและให้คะแนนด้วยเครื่อง — โปรไฟล์ผู้ร่างของบทที่ 12 โดยการออกแบบ เดือนทำงานจริงๆ มีความกำกวม มีการขัดจังหวะ และมีซัพพลายเออร์ที่โกหก หัวข้อถัดไปตีราคาความต่างนั้นออกมาเป็นดอลลาร์
4. **เอ็กซ์โพเนนเชียลหักงอได้ — ทั้งสองทิศ** เส้นโค้งการเติบโตเชิงกายภาพทุกเส้นอ้อมตัวในที่สุด แต่เส้นนี้ ที่ผ่านมา งอไปในทางที่ไม่ชวนสบายใจ (จากเจ็ดเดือนเหลือ 89–131 วัน ระหว่างมีนาคม 2025 กับมกราคม 2026) ใครที่มั่นใจว่าเส้นโค้งต้องหักและใครที่มั่นใจว่ามันต้องย่น กำลังขายอะไรบางอย่างอยู่ทั้งคู่ ♦

ทีนี้ เลขคณิตบนคำถามที่คนถามกันจริงๆ จาก 5.3 ชั่วโมงถึงเดือนทำงาน 170 ชั่วโมง คือหารอบเพิ่มสองเท่า เกือบพอดีเป๊ะ ที่ 89 วันต่อรอบ นั้นลงจอดราวเมษายน 2027 ที่ 131 วัน ราวพฤศจิกายน 2027 เรียกร้องความน่าเชื่อถือ 80% แทน 50% — อีกสองรอบ — หน้าต่างก็เลื่อนไปปลาย 2027 ถึงกลาง 2028 ซ้อนคำเตือนเรื่องการวัดเข้าไปอีกชั้น ประโยคที่ซื้อสัตย์จึงอ่านว่า: เดือนงานเครื่องจักรที่พึงพาได้ เป็นไปได้ที่ไหนสักแห่งใน

2028–2029 ถ้าเทรนด์ยืดยาว — และ "ถ้าเทรนด์ยืดยาว" คือเดิมนั่นทั้งหมดของเรื่องสองซีกของประโยคนั้นถูกเขียนขึ้นในกรกฎาคม 2026 จงเช็กรายการเผ้าดูก่อนพูดซ้ำซีกไหนก็ตาม

หนึ่งปีที่มีผลสืบเนื่อง ERODING

เพื่อถ่วงน้ำหนักความหวังจากเส้นโค้งขอบฟ้า จงชั่งกับเบนช์มาร์กที่จับเอเจนต์ไปบริหารธุรกิจ

Vending-Bench 2 (Andon Labs; อัปเดตกรกฎาคม 2026) ยื่นปฏิบัติการตุ๋นของอัตโนมัติจำลองให้โมเดลดูแลเต็มหนึ่งปีธุรกิจ: เต็มสต็อก ตั้งราคา เปรียบเทียบกับซัพพลายเออร์ รับมือเรื่องไม่คาดฝัน และอยู่รอดทางการเงิน ไม่มีปริศนากลใด ๆ — มีแค่หนึ่งปีจำลองของผลสืบเนื่อง โมเดลที่ดีที่สุด Claude Opus 4.7 จบปีด้วยมูลค่าสุทธิ \$10,937 กลยุทธ์มนุษย์ระดับแค่ "ดี" ถูกประเมินไว้ราว \$63,000 ๕๕ ช่องว่างราวหกเท่า — ไม่ใช่บนข้อสอบตรรกะ แต่บนการเลี้ยงธุรกิจจิวให้มีชีวิตรอด

เงินหายไปไหน? หายเข้าไปในช่องว่างที่เมตริกขอบฟ้าสะอาดเกินกว่าจะมองเห็นพอดิบพอดิ ☹️: ความน่าเชื่อถือตลอดช่วงเวลายาว การกู้คืนจากความผิดพลาดแทนที่จะทบทวนมัน และการไม่ถูกซัพพลายเออร์ตำหนิ ให้เครดิตตรงที่ควรให้: โมเดลหัวแฉกเก็บแต้มส่วนหนึ่งผ่านการเจรจาต่อรองราคาแบบไม่ลดละ — ทักษะคล่องแคล่วทางสังคม และเป็นเสียงสะท้อนเบาๆ ของผลการโน้มน้าวในบทที่ 12 แต่ความคล่องแคล่วในช่วงนั้น ไม่ใช่ความอยู่รอดตลอดทั้งปี

คัมค่าที่จะหยุดตรงคำถามว่าทำไมหนึ่งปีของผลสืบเนื่องจึงด้านทานได้ ในเมื่อทฤษฎีบทด้านทานไม่ได้ ☹️ เครื่องยนต์ของบทที่ 12 คือผู้ตรวจรับราคาถูก: ลองล้านครั้ง เก็บที่ตัวตรวจอวยพร แต่หนึ่งปีธุรกิจไม่มีตัวตรวจกลางทาง — ปิดแบ็กมาช้า พันเกลียวกับโซคและการตัดสินใจพลาดในเดือนมีนาคมโผล่มาเป็นรูโหว่ในบัญชีเดือนกันยายน ที่ไหนผิดแบ็กช้า เบาบาง และมีราคาต้องจ่าย การค้นหาแบบถึกก็หยุดทบทวน และสัตว์ผู้อดทนที่คอยแก้ไขความผิดพลาดของตัวเองก็ยังคัมค่าข้าวอยู่

สองบรรทัดที่ต้องกำไว้ด้วยกัน ทั้งคู่ลงวันที่กรกฎาคม 2026: โมเดลพัฒนาขึ้นบนเบนช์มาร์กนี้ราว \$799 ต่อเดือน บน fit ที่ $R^2 = 0.96$ — เส้นตรงจนน่าขนลุก — และเส้นนั้นตัดผ่านหมุดมนุษย์ \$63,000 ราวปี 2031 ถ้าไม่มีอะไรหักงอ ใบรายงานผลใบเดียวกันจึง

แบกสองสารพร้อมกัน: มนุษย์ครองปีแห่งผลสืบเนื่องอยู่ในวันนี้ และช่องว่างกำลังปิดลงด้วยอัตราที่ประกาศไว้ต่อสาธารณะ คู่สารนั้น — แต้มต่อชัดเจน นาฬิกามองเห็นได้ — คือความหมายของ **ERODING** ในหนังสือเล่มนี้

ช่องว่างที่ทำให้เครื่องจักรขายหน้า **ERODING**

ช่องว่างมนุษย์-เครื่องจักรที่วัดได้ใหญ่ที่สุดในการเบนซ์มาร์กกระแสน้ำ ฌ กรกฏาคม 2026 ไม่ใกล้เคียงกันเลยด้วยซ้ำ

ARC-AGI-3 (เปิดตัว 25 มีนาคม 2026) ทิ้งตารางสถิติไปสู่สภาพแวดล้อมแบบโต้ตอบที่ไร้คำสั่ง ไร้เป้าหมายที่แถลง ไร้กติกาที่บรรยายไว้ เอเจนต์ต้องสำรวจ สร้างแบบจำลองของโลกขึ้นจากศูนย์ คิดให้ออกว่าเป้าหมายคืออะไรด้วยซ้ำ แล้วจึงวางแผนมุ่งเข้าหามัน มันคือฉบับห้องทดลองของการถูกหย่อนลงกลางสถานการณ์ที่ไม่คุ้นเคย — สิ่งที่ถูกปริศนาในภาค II ซ่อมกันในรูปย่อส่วน

ตอนเปิดตัว: มนุษย์แก้ได้ 100% ของสภาพแวดล้อม โมเดลแนวหน้าทุกตัวได้คะแนนต่ำกว่า 1% ๕๕ คนธรรมดา เกือบสมบูรณ์แบบ เครื่องจักรที่ดีที่สุดในโลก แคเศษปิดเศษเหนือศูนย์ ภายในกรกฎาคม 2026 สแนปช็อตสาธารณะที่ดีที่สุดไปถึงราว 8% (GPT-5.6 Sol; ตัวเลขตัวรวบรวม ความมั่นใจ ~80%) △

จงดำนแรงกระตุ้นที่จะสร้างศาลเจ้าตรงนี้ แหล่งอ้างอิงของหนังสือเล่มนี้เองให้เหตุผลไว้แล้ว: ARC-AGI-1 ยื่นห้าปีก่อนร่างภายในฤดูกาลเดียว (ธันวาคม 2024) ARC-AGI-2 ยื่นราวสิบหกเดือน (กรกฎาคม 2026) สถิติประจำตระกูลชี้ว่าตัวที่สามก็จะถูกกักเคาะเช่นกัน — และจากไม่ถึง 1% สู่ราว 8% ในเวลาไม่ถึงสี่เดือน ไม่ใช่กำแพงที่ยืนมั่นคง มันคือกำแพงที่กำลังถูกป็น การพนันว่าช่องว่างนี้จะยื่นห้าปี คือการพนันสวนเทรนด์เดียวกัน เป๊ะกับที่มารุ่นพี่ทั้งสองของมัน จึงเป็นที่มาของแท็ก: **ERODING** พร้อมช่องว่างปัจจุบันที่ใหญ่ที่สุดในบัญชี ฤดูกาล ARC Prize 2026 ปิดพฤศจิกายน 2026 รายการเฝ้าดูข้างล่างแถลงล่วงหน้าว่าคะแนนเท่าไรจะบังคับให้เขียนใหม่

ปีแตก เมื่อโลกพูดกลับ **ERODING**

รอยเลื่อนเดียวกันพาดผ่านการคิดแนวข้าง (lateral thinking) และคัมค่าที่จะทำแผนที่ให้เที่ยงตรง เพราะภูมิปัญญาชาวบ้านวางมันไว้ฝั่งมนุษย์มากเกินไปไกล

บนชุดปริศนาคำทายแบบสถิติ เครื่องจักรทำได้คืออยู่แล้ว: 76–83% ข้ามสโตร์การพรอมต์ต่างๆ บนเบนซ์มาร์ก 139 ปริศนา (งานศึกษาปี 2026) การ "อ้อ!" แบบซื้อมาเดียว — ข้อหลอดไฟสว่างบนหน้ากระดาน — ไม่ใช่แต่มีต่อมนุษย์ที่ไว้ใจได้อีกต่อไป และหนังสือเล่มนี้จะไม่สร้างเป็นอื่น ที่ที่มนุษย์ยังชนะชัดคือการปิ้งแบบโต้ตอบ: situation puzzles (แนวปริศนาห้องนั่งเล่นที่ฉากพิสดารต้องถูกเจาะด้วยการถามคำถามใช่/ไม่ใช่ให้ถูกจุด) ที่ศึกษาผ่าน LatEval และชุด SPLAT ~975 ปริศนา ที่นั่น โมเดลแสดงท่าคิดแนวข้าง "แทบเป็นศูนย์" ในการโต้ตอบ ถอยกลับไปบดเคี้ยวแบบนิรนัย ทั้งที่ท่าที่ทำได้คือการตั้งคำถามกับตัวกรอบเอง ๕๕

สังเกตว่านี่คือความล้มเหลวเดียวกันกับที่ ARC-AGI-3 วัด เพียงแต่ใส่เสื้อผ้าคนละชุด ๖: การจัดโครงสร้างการแทนความใหม่ขณะกำลังสำรวจมัน — อัปเดตไม่ใช่แค่คำตอบของคุณ แต่รวมถึงภาพว่าคำถามคืออะไร กลางบทสนทนากับโลกที่ตอบกลับมา ภาค II เรียกสิ่งนี้ว่าการทลายกรอบ บทที่ 4 ฝึกมัน ณ กรกฎาคม 2026 ฉบับโต้ตอบยังเป็นแผ่นดินของมนุษย์ ที่นั่งอยู่ในรัศมีระเบิดของเบนซ์มาร์กที่เคลื่อนที่เร็วที่สุดในวงการ **ERODING** — จงเฝ้าจอยมัน จงฝึกมัน แต่อย่าเอาอัตลักษณ์ไปฝังไว้กับมัน

นัยต่อการฝึกนั้นตรงไปตรงมา และภาค V หยิบมันไปทำต่อ: จงฝึกการปิ้งในรูปแบบโต้ตอบ ไม่ใช่ปริศนาคำทายบนหน้ากระดาน — อันนั้นเครื่องจักรได้ไปแล้ว — แต่คือฉบับที่คุณต้องซื้อข้อมูลด้วยคำถาม สังเกตให้ทันว่าภาพปัญหาในหัวคุณผิด แล้วสร้างมันขึ้นใหม่ขณะนาฬิกาเดิน ณ กรกฎาคม 2026 ทักษะนั้นหายากในเครื่องจักรอย่างวัดได้ และเป็นสิ่งที่เหลืออยู่บนกระดานที่มีความเป็นปริศนามากที่สุด

วิธีอ่านเทรนต์โดยไม่เมาไฮป์

หัวข้อนี้คือน้ำหนักบรรทุกที่แท้จริงของบท ตัวเลขข้างบนจะแก้ตัวลง แต่วิธีจัดการกับตัวเลขแบบนั้นไม่ควรแก้ตาม กฎหกข้อ แต่ละข้อถูกฝึกใช้จริงบนข้อมูลของบทนี้เองมาแล้ว ✦:

1. **ลงวันที่ทุกตัวเลข** ข้อกล่าวอ้างความสามารถที่ไร้วันที่คือโฆษณา พอมีวันที่ มันกลายเป็นจุดข้อมูลที่พล็อตและตรวจได้ ทุกตัวเลขในภาคนี้แบกเดือนของมันไว้ด้วยเหตุผลนี้เปะๆ

2. **หานิยามก่อนตัวเลข** ห้าสิบเปอร์เซ็นต์ของอะไร? ถูกเลือกชอบโดยใคร? "~85%" ของ ARC-AGI-2 (กรกฎาคม 2026) กับ "24.03%" (ธันวาคม 2025) บรรยายเบนซ์ มาร์กตัวเดียวกันภายใต้ตั้งคำถามคนละก้อน — ความไม่ลงรอย 3.5 เท่าที่ถูกผลิตขึ้นจากนิยามล้วนๆ ไม่ใช่จากความสามารถ
3. **Extrapolate ด้วยปลายทั้งสองข้าง อย่าใช้จุดกึ่งกลาง** พิสัยเวลาเพิ่มสองเท่าที่วัดได้ 89–131 วัน แตกออกเป็นความไม่ลงรอยหกเท่าภายในสองปี (≈ 250 กับ $\approx 1,600$ ชั่วโมง ภายในมกราคม 2028) พิสัยข้อสัณยที่กว้างขนาดนั้นไม่ใช่จุดอ่อนของการวิเคราะห์ มันคือตัวการวิเคราะห์ ตัวเลขมันนอกมันใจตัวเดียวต่างหากที่จะเป็นคำโกหก
4. **ถามว่าไม่บรรทัดมองไม่เห็นอะไร** ชุดภารกิจของ METR โพรเซสเซอร์เหนือ 16 ชั่วโมง กระดานผู้นำอ้อมตัว ผู้เชี่ยวชาญเริ่มแยกไม่ออก (บทที่ 13) เส้นแบนราบที่ยอดบนสุดของสเกล เป็นเครื่องมือที่พึงบอ่ยพ่อยๆ กับที่เป็นที่ราบสูง ☹
5. **แยกความสามารถออกจากผลสืบเนื่อง** เบนซ์มาร์กที่ร่วงไม่ได้แปลว่างานหายไป: คะแนนวินิจฉัย 67.1% มาพร้อมการสังเกตตรวจเกินและไม่มีวอร์ดให้ต้องรับผิดชอบ (บทที่ 12) ยาที่ออกแบบแล้วมีศูนย์การอนุมัติ ณ กลางปี 2026 (บทที่ 12) ช่องว่างตู้ขายของยืนอยู่ราว \$52,000 (กรกฎาคม 2026) การประจำการจริงวิ่งบน เศรษฐศาสตร์ เวอร์กโฟลว์ และการะรับผิดชอบ — ภูมิประเทศของบทที่ 13 — และตามหลังความสามารถอยู่เป็นปีๆ
6. **ผูกมัดล่วงหน้าว่าจะอะไรจะเปลี่ยนใจคุณ** ตัดสินใจวันนี้เลยว่าตัวเลขไหน ที่เกณฑ์เท่าไร จะพลิกคำตัดสินของคุณ — แล้วไปเช็คตามกำหนด คำพยากรณ์ที่ไร้ตัวหักล้างคืออารมณ์ รายการข้างล่างคือคำผูกมัดล่วงหน้าของหนังสือเล่มนี้เอง ตีพิมพ์เป็นลายลักษณ์ ในที่ที่มันถูกแก้เจียบๆ ไม่ได้

รายการเฝ้าดู

ตัวเลขห้าตัว ที่ใครก็ตรวจได้ ซึ่งจะเป็นผู้ให้เกรดการบ้านของภาคนี้ สถานะ ณ 16 กรกฎาคม 2026:

#	เฝ้าดู	ยืนอยู่ตรงไหน ณ เวลาเช้า แท่นพิมพ์	อะไรจะขยับคำตัดสิน
1	IMO 2026 เชียงไฮ้ 10–21 กรกฎาคม — แข่งสต่ออยู่ ขณะหนังสือเข้าแท่น	ตลาดพยากรณ์ให้ราคา เหรียญทอง AI ที่ ~82%; ผลออกสัปดาห์สุดท้ายของ กรกฎาคม 2026	ได้ทอง: คำตัดสิน "เส้นบทพิสุจน์" ของบทที่ 12 ยืนยันตามกำหนด · ไม่ได้ทอง: หลักฐานความแปรปรวน ปีต่อปีที่ตลาดมองพลาด
2	กระดานผู้นำ ARC-AGI-3 จนถึงปิดฤดูกาล ARC Prize 2026 (พฤศจิกายน 2026)	<1% ตอนเปิดตัว (มีนาคม 2026) → ~8% (กรกฎาคม 2026)	เอเจนต์ข้าม 30–50%: ปรับลด สถานะ "ช่องว่างใหญ่สุด" หดครึ่ง ชีวิตของการปีนแบบโต้ตอบ
3	รีลีส time-horizon ตัวถัด ไปของ METR (ผู้สืบทอด TH 1.1 ที่แก้เรื่องความ อึมทัวแล้ว)	5.3 h วัดจริง (มกราคม 2026); รีวิว ~16 h ยังไม่ ยืนยัน Δ	ยืนยันขอบฟ้า >16 h: คอลัมน์สอง ปีข้างบนอยู่บนราง; ซ้ำกว่านั้น: การ หักงอจริงครั้งแรกของเส้นโค้ง
4	Vending-Bench 2 เทียบ เส้น "มนุษย์ระดับดี" ~\$63K	\$10,937 ดีสุด; +\$799/ เดือน, $R^2 = 0.96$ (กรกฎาคม 2026)	การกระโดดขึ้นบันได (ไม่ใช่แค่ ความชัน): เอเจนต์แบกผลสืบเนื่อง กำลังถูกกัดเซาะเร็วกว่าเชิงเส้น; จุด ตัด ~2031 ถ้าเส้นแค่อินตามเดิม
5	หุ่นยนต์เรียนจาก ประสบการณ์ (ผู้สืบทอด ของ $\pi^*0.6$)	RL ในโลกจริงสาธิตแล้วใน ฉากแคบ (2026)	หุ่นยนต์ที่เก็บทักษะข้ามวันได้ จะ โจมตีคู่มือบทที่ 13 สองแห่ง พร้อมกัน — การมีกายกับการ เรียนรู้ต่อเนื่อง

ผู้อ่านปี 2028 ที่ลือหน้ากระดาษนี้มีครบทุกอย่างที่ต้องใช้ในการให้เกรดมัน: หัวข้อกล่าว
อ้าง หัวเกณฑ์ หัววันที่ ตรงไหนที่หนังสือกลายเป็นฝ่ายผิด วิธีการที่เขียนมันขึ้นมาก็แสดง
วิธีแก้ไขมันไว้แล้ว — ซึ่งคืออำนาจชนิดเดียวที่บทบาทนี้อ้างสิทธิ์ได้อย่างซื่อสัตย์

จุดที่ภาค IV ลงจอด

เอารายงานทั้งสามฉบับมาบวกกัน

สิ่งที่ร่างคืออุปปิด: งานที่นั่นนั่งอยู่กับที่ เป้าหมายที่ถูกส่งมอบมาครบถ้วน คำตอบที่
เครื่องจักรตรวจได้ด้วยเงินหลักสตางค์ — บทพิสุจน์ สนามแข่ง ข้อสอบ ชาร์ตที่เตรียมไว้

(บทที่ 12) สิ่งที่ยืนอยู่คืออุปเปิด: โลกที่สลับ การเรียนรู้ที่ทบทวนข้ามทศวรรษ ความสงสัยที่ถูกครอบครองจริงไม่ใช่ถูกแสดง เป้าหมายที่ถูกเลือกเองและลงนามรับ ทางแทนที่จะเป็นศูนย์กลาง (บทที่ 13) และระหว่างทั้งสองคือแนวทางของบทนี้ — ชั่วโมงที่เพิ่มสองเท่าทุก 89–131 วัน ปีธุรกิจที่ฝั่งมนุษย์ยังนำหกเท่า ช่องว่างการให้เหตุผลเชิงโต้ตอบที่ 100% ต่อ 8% — ทุกตัวเลขมีวันที่ ทุกตัวเลขกำลังขยับ (ณ กรกฎาคม 2026)

ที่นี้ถึงคติของเรื่อง และมันคือเหตุผลที่ภาคนี้นั่งอยู่ในหนังสือปริศนา ไม่ใช่ในรายงานนโยบาย

มองคอลัมน์ฝั่งทันทานอีกครั้งหนึ่ง การเรียนรู้อย่างลึกจากตัวอย่างหยิบมือเดียว การแบกบทเรียนไปข้างหน้าให้มันทบทวน การรู้ว่าคำตอบไหนของตัวเองควรสงสัย การจัดโครงสร้างปัญหาใหม่ขณะอยู่ข้างในมัน การเลือกว่าอะไรสมควรค่าแก่การลงทุน และการลงนามรับผลลัพธ์ นั่นไม่ใช่รายการรางวัลพลบใจ — มันคือหลักสูตร และมันคือหลักสูตรของหนังสือเล่มนี้เอง ปริศนาหนึ่งข้อที่ถูกย่อจนเป็นท่าถาวรคือคูเมืองที่ 2 ภาควิปฏิบัติ สมุดบันทึกพลาดกับ upsolving คือคูเมืองที่ 3 ที่ถูกฝึกจริง แบบฝึกการสอบเทียบความมั่นใจ (calibration) คือคูเมืองที่ 4 จิตใจของคนออกใจ — ถามว่าทำไมต้องใจนี้ ทำไมต้องเงื่อนไขพวกนี้ — คือคูเมืองที่ 5 และทุกกรอบที่หนังสือเล่มนี้ทลายมาตั้งแต่เก้าจุดนั้น คือกล้ามเนื้อมัดเดียวกับที่ ARC-AGI-3 วัด

ทั้งหมดนี้ไม่มีอะไรถูกออกแบบมาเป็นคำตอบได้เครื่องจักรเลย — คลังตำราที่แก่กว่าทรานซิสเตอร์หลายสหัสวรรษ แต่เครื่องจักรได้รับการตรวจสอบบัญชีให้เราโดยไม่ตั้งใจ: จากทุกสิ่งที่โรงยิมแห่งนี้สอน พวกมันเอาส่วนที่ตรวจสอบได้ไป และทิ้งส่วนที่ทบทวนไว้

โรงยิมนี้อายุสี่พันปี เครื่องจักรไม่ได้ปิดมัน พวกมันแค่เร่งวัดมัน แล้วทำเครื่องหมายว่าห้องโถงไหนยังสำคัญอยู่ กระดานคะแนนจะขยับต่อไป — วันที่ถูกกำกับไว้บนทุกตัวเลขก็เพื่อให้คุณขยับตามมันได้ ภาค V จะแปลงแผนที่ผืนนี้เป็นแผนฝึก

แหล่งอ้างอิง

เข้าถึงทั้งหมดเมื่อ 16 กรกฎาคม 2026 รายการจากสื่อและตัวรวบรวมถูกระบุกำกับไว้ โปรดปฏิบัติตามตัวเลขของพวกมันด้วยระดับความมั่นใจตามที่ระบุในตัวบท

- METR, Time Horizon 1.1 (January 29, 2026): metr.org/blog/2026-1-29-time-horizon-1-1/

- METR, Measuring AI Ability to Complete Long Tasks (March 19, 2025): metr.org/blog/2025-03-19-measuring-ai-ability-to-complete-long-tasks/
- Doubling-time refit and ~16 h preview figure (February 2026 data fit) — secondary: x.com/aakashgupta/status/2053207639107174452
- Vending-Bench 2, Andon Labs (updated July 2026): andonlabs.com/evals/vending-bench-2
- ARC-AGI-3, ARC Prize Foundation (launched March 25, 2026): arcprize.org/arc-agi/3 · technical report: arxiv.org/abs/2603.24621
- ARC-AGI-3 frontier snapshot ~8% (July 2026) — aggregator figure, ~80% confidence; no primary publication as of press time
- ARC Prize 2025 results and analysis (efficiency-track figures, December 2025): arcprize.org/blog/arc-prize-2025-results-analysis · arxiv.org/html/2601.10904v1
- SPLAT situation-puzzle benchmark (~975 puzzles): arxiv.org/html/2410.06733v1 · LatEval — cited by name
- Riddle-benchmark results, 76–83% across prompting styles, 139 riddles (2026 study) — cited by description; no public URL recorded at press time
- International Mathematical Olympiad 2026, Shanghai (July 10–21, 2026): imo-official.org/editions/2026/
- Chapter cross-references: diagnosis and drug-approval status (Chapter 12 sources); expert-detection flip and accountability doctrine (Chapter 13 sources)

ภาค V

โรงยิมทางปัญญา

บทที่ 15

ฝึกแก้ข้อ

ภาค IV จบลงด้วยคำอ้างที่ควรฟังแล้วเอะใจ: แต้มต่อของมนุษย์ที่ยังยืนระยะ — การสอบเทียบความมั่นใจ การเรียนรู้ต่อเนื่อง การเก็บเกี่ยวความรู้ที่มีประสิทธิภาพ รสนิยม และความเป็นเจ้าของ — คือสิ่งที่คนคนหนึ่งฝึกได้พอดีพอดี เอะใจก็ถูกแล้ว เพราะ "ฝึกได้" คือจุดที่หนังสือว่าด้วยการคิดมักเริ่มโกหกกันมาแต่ไหนแต่ไร คำแนะนำเรื่องการฝึกคือหัวมุมเดียวของหนังสือแนวนี้นี้ที่ความคิดเข้าข้างตัวเองทำกำไรได้จริง

บทนี้จึงแบกเกรดกำกับคำอ้างหนาแน่นที่สุดในเล่ม สิ่งที่ตามมาไม่ใช่ปรัชญาการพัฒนาตน แต่เป็นรายการสั้นๆ ของแบบฝึกที่มีหลักฐานหนุนหลัง บ่ายซีไปยังแบบฝึกชื่อดังที่มีรายงานชั้นสูตรแนบมา และโพโทคอลการใช้เครื่องจักรเป็นคู่ซ้อมโดยไม่ปล่อยให้มันกลายเป็นไม้ค้ำ บทที่ 16 จะแปลงทั้งหมดนี้เป็นตารางฝึก

โรยิมที่ไม่เวิร์ก

เริ่มที่หลุมใหม่ล่าสุดในสุสาน

คำโฆษณาชวนเชื่อ: เล่นปริศนาในแอปวันละสิบนาที แล้วความจำ สมาธิ และเชาวน์ปัญญาโดยรวมจะพุ่งโตเหมือนกลั่มที่ถูกเทรน คำโฆษณานี้เคยถูกทดสอบอย่างถูกวิธี ครั้งหนึ่งในสเกลใหญ่ ปี 2010 Adrian Owen กับคณะพาผู้ใหญ่ 11,430 คนผ่านการฝึกสมองออนไลน์หกสัปดาห์ แล้ววัดว่าอะไรขยับบ้าง (Nature, 2010) คะแนนในงานที่ฝึกได้ขึ้นขึ้น ส่วนคะแนนของทุกอย่างที่เหลือ — รวมถึงงานที่ไม่ได้ฝึกซึ่งเป็นญาติสนิทของงานที่ฝึก — ไม่ขยับเลย ๕ งานรวีวปี 2016 โดย Daniel Simons กับเพื่อนร่วมงานอีกหกคน อ่านแฟ้มหลักฐานทั้งหมดของอุตสาหกรรมนี้แล้วได้คำตอบเดียวกัน: หลักฐานแน่นหนาว่าเก่งขึ้นในเกมที่ฝึก มีเพียงน้อยนิดสำหรับการถ่ายโอนระยะใกล้ และไม่มีขึ้นไหนน่าเชื่อถือพอสำหรับ "ชีวิตคุณจะดีขึ้น" ๕ ปีเดียวกันนั้น US Federal Trade Commission สั่งปรับผู้ผลิต Lumosity สองล้านดอลลาร์ฐานโฆษณาหลอกลวง รายงานชั้นสูตรฉบับเต็ม — พร้อมมายาคติพี่น้องอีกห้าเรื่องในแปลงข้างเคียง — อยู่ในภาคผนวก ข ▲

ทำไมมันจึงล้มเหลว คือกลไกที่ควรเก็บไว้เป็นสมบัติ ☸ การฝึกซ้อมนั้นจำเพาะเจาะจงอย่างโหดร้าย คุณเก่งขึ้นในสิ่งที่คุณลงมือทำตามตัวอักษร บวกลงแหวนบางๆ ของเพื่อนบ้านใกล้เคียง การสาธิตคลาสสิกอายุห้าสิบปีแล้ว: เขียนหมากรุกฆ่าเลื่องกระดานกลางเกมแวนเดียวก็วางหมากคืนได้เกือบเป๊ะ นักหมากรุกระดับสโมสรทำไมได้ แต่พอสลับหมากชุดเดียวกันให้มั่วซั่วไร้ความหมาย อภินิหารของเซียนก็ระเหยหาย (Chase and Simon, 1973 ๕๕) เขียนไม่เคยมีความจำดีกว่าใคร พวกเขามีคลังของ "ก้อน" (chunks) และกระดานมั่วไม่มีก้อนให้จับ ทักษะนั้นไม่เคยเป็นทักษะทั่วไป มันแค่ดูทั่วไปเมื่อมองจากข้างนอก

และนี่คือบทแทรกที่หนังสือเล่มนี้หลบไม่พ้น: ปริศนาอยู่ที่ฟิสิกส์เดียวกัน แก่ปริศนาห้าสิบข้อในสารบบนี้แบบสุกเอาเผากิน แล้วสิ่งหลักที่คุณจะเก่งขึ้นก็คือปริศนาห้าสิบข้อนั่นเอง หนังสือปริศนาที่สูญญามากกว่านั้นโดยไม่มีกลไกรองรับ ก็คือแอปฝึกสมองที่ตัวพิมพ์สวยกว่า

หนังสือเล่มนี้ถูกสร้างขึ้นรอบทางรอดข้อนี้

ทางรอด: เรียกชื่อท่า

ทางรอดข้อนี้มีตระกูลการทดลองรับรอง ปี 1980 Mary Gick กับ Keith Holyoak ให้ผู้คนแก้โจทย์รังสีของ Duncker — ทำลายเนื้องอกด้วยรังสีที่หากแรงเต็มพิกัดจะทำลายเนื้อเยื่อได้ด้วย — หลังจากให้อ่านนิทานการทัพที่มีโครงกระดูกเดียวกันเป๊ะ: แม่ทัพแบ่งกองทัพเป็นกองเล็กๆ แล้วบุกเข้าประชิดป้อมพร้อมกันจากทุกทิศ หากไม่ช่วยอะไรเลย มีราวหนึ่งในสิบที่แก้โจทย์เนื้องอกได้ อ่านนิทานป้อมปราการจบหมดๆ ก็ยังมีเพียงราวสามในสิบที่กระโดดข้ามได้ด้วยตัวเอง — อุปมานอนนิ่งอยู่ในความจำ เฉื่อยชา แต่พอบอกว่า "นิทานที่เพิ่งอ่านอาจช่วยได้นะ" คนส่วนใหญ่แก้ได้ทันที ๕๕ ความรู้โดยตรงนั้นแล้วสิ่งที่ไม่อยู่คือการจำได้ว่าต้องหยิบ ในงานภาคต่อ มีกลุ่มหนึ่งที่ถ่ายโอนได้เองในอัตราสูงกว่ามาก: คนที่อ่านนิทานเทียบเคียง สองเรื่อง แล้วเขียนโครงกระดูกที่สองเรื่องนั้นใช้ร่วมกันลงกระดาษ ๕๕

นั่นคือทฤษฎีทั้งหมดของหนังสือเล่มนี้ ในการทดลองเดียว ☸ การถ่ายโอนตามหลังสคีม่าที่ถูกเรียกชื่อและถูกนำมาเทียบ — ไม่ใช่ตามหลังการได้เห็นเฉยๆ แก่ปริศนาเชือกสองเส้นสอนคุณเรื่องปริศนาเชือกสองเส้น แต่แก้แล้วเขียนต่อว่า "ทำคือ ใช้อัตรา ไม่ใช่ความ

ยาว — หาปริมาณที่ความยุ่งเหยิงแต่ไม่ถึง" คือการเก็บบางสิ่งที่หยิบมาใช้ซ้ำได้เข้าแฟ้ม
 ทำที่คุณเรียกชื่อได้คือทำที่คุณสังเกตเห็นได้ และการสังเกตเห็นคือเกมทั้งเกม ภาค III
 วางข้อพิสูจน์ไว้ครบถ้วนแล้ว: ความซ้ำของคือคลังของคู่ "จำได้-ลงมือ" ที่ถูกคอมไพล์
 จากโจทย์ที่แก้สำเร็จและโจทย์ที่พลาด เปลี่ยนการค้นหาค้นหาให้เป็นการเปิดตาราง เจ้าของ
 เทรียนูรางวัลพกดิตตัวราวสองร้อยคู่ หนังสือเล่มนี้แจกสามสิบสอง — ภาคผนวก ก —
 และช่องว่างระหว่างการอ่านมันกับการเป็นเจ้าของมัน คือการฝึกข้างล่างนี้

สิ่งที่ถ่ายโอนได้จริงจึงเป็นการจำทำให้ขึ้นใจข้ามผิวหน้าโจทย์อันหลากหลาย ๕๕ — และ
 มันถ่ายโอนภายใต้เงื่อนไขที่รู้จักดี ไม่หือหาว ซึ่งงานวิจัยความจำครั้งศตวรรษยืนยันทัน
 แล้วซ้ำอีก:

หลัก	ความหมายในที่นี้	เกรด
ดึงความจำขณะ อ่านซ้ำ	แก้ใหม่จากตัวโจทย์เปล่าๆ อย่าอ่านเฉลยซ้ำแล้ว พยักหน้าตาม	๕๕ Roediger & Karpicke, 2006
เว้นระยะขณะอัด รวม	กลับมาอีกที่เป็นวันเป็นสัปดาห์ ไม่ใช่เป็นนาที	๕๕ Cepeda et al., 2006
ผันแปรขณะซ้ำ เดิม	ทำเดิม เครื่องแต่งกายใหม่ โดยตั้งใจ	๕๕ งานวิจัยสาย interleaving
ความยากคือ พีเจอร์	ซ้อมแบบเค้นแรงและพลาดบ่อย เรียนรู้ได้มาก กว่าซ้อมแบบลื่นไหล	๕๕ "desirable difficulties" ของ Bjork
ความลื่นคือนัก โกหก	"รู้สึกง่ายจัง" วัดความคุ้นเคย ไม่ใช่การเรียนรู้	๕๕

แถวสุดท้ายคือแถวอันตราย การซ้อมที่รู้สึกว่าได้ผล — อ่านเฉลยงามๆ ซ้ำ นั่งดูคนอื่น
 ฉลาด — ผลิตความลื่น และความลื่นให้ความรู้สึกจากข้างในเหมือนทักษะทุกกระเบียด
 ส่วนการซ้อมที่ได้ผลจริงจะรู้สึกแย่ตอนที่มีมันกำลังได้ผล วางแผนเพื่อเรื่องนี้ไว้ ไม่จั้นแผน
 พัง

เครื่องมือ

คณิตศาสตร์แข่งขันและการเขียนโปรแกรมแข่งขันคือวัฒนธรรมการฝึกเหตุผลที่กลับมา ประณีตที่สุดเท่าที่เผ่าพันธุ์เราเคยสร้าง — ข้อสัจพจน์ปิดกั้นเพราะฟีดแบ็กของมันเป็นป้อมไม่ได้: บทพิสูจน์ใช้ได้หรือใช้ไม่ได้ โค้ดผ่านหรือไม่ผ่าน บทที่ 8 บรรยายวัฒนธรรมนั้น จากข้างใน ตรงนี้คือเครื่องมือของมัน ปรับพันธุ์มาให้พลเรือนที่มีเวลาวันละครึ่งชั่วโมง

Upsolve

โจทย์ที่คุณพลาดคือหลักสูตรของคุณ ธรรมเนียมข้อที่วงการนี้เห็นพ้องกันที่สุด: จบเซสชันใดก็ตาม ให้กลับไปหาข้อที่ชนะคุณ — วันเดียวกันนั้น ก่อนความเจ็บจะจาง — แล้วแก้มันให้ถึงที่สุด (upsolving — แก้ซ้ำหลังรู้แพ้) โจทย์ข้อหนึ่งจะถูกครอบครองก็ต่อเมื่อมันถูกแก้ไขจากหน้ากระดาษเปล่า ไม่ใช่เมื่อเฉลยของมันถูกอ่านจนเข้าใจ การเข้าใจเฉลยของคนอื่นคือกีฬาของผู้ชม ♦ นักแข่งพูดว่าโจทย์ "เข้ามือ" ก็ต่อเมื่อผ่านการแก้ซ้ำแล้วเท่านั้น และสำนวนนี้เป๊ะทุกตัวอักษร: มือ ไม่ใช่หัว

สมุดบันทึกพลาด

เครื่องมือที่ต่อรองไม่ได้ ทุกการพลาดกลายเป็นหนึ่งรายการ และทุกรายการเรียกชื่อ**ทำที่พลาดไป** ด้วยคลังศัพท์ของดัชนี ห้าบรรทัด:

1. วันที่ และปริศนา (ระบุด้วย บท-หมายเลข)
2. ค้างตรงไหน — หนึ่งประโยค
3. ทำที่พลาด — ระบุชื่อ จากภาคผนวก ก
4. สัญญาณบอกทำที่มองข้ามไป — หนึ่งประโยค
5. ประเภทของการพลาด: อ่านโจทย์พลาด · ผิดกรอบ · ทำถูกแต่เข้าไป · กระโดดโดยไม่พิสูจน์ · งานเสมียนหลุด

บรรทัดจำแนกประเภทดูเหมือนงานราชการ และเป็นบรรทัดที่มีค่าที่สุด "ฉันท์เล่นปริศนาไม่เก่ง" คืออารมณ์ "ห้าครั้งหลัง ฉันท์พลาดแบบกระโดดโดยไม่พิสูจน์ไปสามครั้ง" คือการวินิจฉัยที่มีใบสั่งยาแนบมาด้วย — วินัยการพิสูจน์แบบสลับชั้นของบทที่ 10 ใช้จนกว่ารูรั้วจะปิด นักแข่งเรตติงสูงจดบัญชีแบบนี้เป๊ะๆ ข้ามปีแล้วปีเล่าของการแข่งขัน สมุดคือการแจกแจงความผิดพลาดของพวกเขาที่ถูกทำให้มองเห็น แล้วถูกทำให้เล็กลง

ทบทวนแบบเว้นระยะ — เฉพาะข้อที่พลาด

แก้ข้อข้อที่ชนะคือการประจบตัวเอง แก้ข้อข้อที่แพ้คือการเรียนรู้ สมุดบันทึกพลาดทำหน้าที่กองไฟทบทวนไปในตัว: ปริศนาที่พลาดแต่ละข้อวนกลับมาที่ราวสามวัน สองสัปดาห์ และสองเดือน — แก้ข้อจากตัวโจทย์ พร้อมจดเวลาที่ใช้แก้ข้อ เฉพาะข้อที่พลาดเท่านั้น ข้อที่ชนะไม่ต้องซ่อม และการซ่อมมันคือวิธีที่เวลาฝึกแปลงร่างเป็นความบันเทิงอย่างเจียบๆ ♦ นี่คือ spaced repetition ผลลัพธ์ที่แข็งแกร่งที่สุดในวรรณกรรมการเรียนรู้ ๕๕ หันหัวไปที่แพทเทิร์นการให้เหตุผลแทนคำศัพท์ — หลักสูตรเฉพาะตัวที่การ์ดทุกใบได้ที่นั่งของมันมาด้วยการชนะคุณ

บันได: ขึ้นที่เลขา

ความสบายไม่สอนอะไร ความตื่นตระหนกก็ไม่สอนอะไร นักเขียนโปรแกรมแข่งขันเรียกมันว่ากฎ +200 — ซ้อมที่ระดับเรตติงสูงกว่าตัวเองราวสองร้อยแต้ม ที่นี่หน่วยคือดาว: เล่นสูงกว่าระดับที่คุณแก้ได้อย่างสะอาดหมดจดหนึ่งดาว สัญญาณสมมาตรกันสองข้าง: สัปดาห์ที่สมุดบันทึกพลาดว่างเปล่าแปลว่าบันไดต่ำเกินไป เซสชันที่มีแต่คำใบ้ไร้ความคืบหน้าแปลว่าบันไดสูงเกินไป ยากพอให้เจ็บ ใกล้เคียงให้จบ

ดินก่อนเปิดเฉลย

สามสิบนาทีของความเคลื่อนไหวจริงก่อนอ่านเฉลยใดๆ — และ ความเคลื่อนไหว มีนิยาม: การแทนโจทย์ที่ลองแล้ว กรณีที่ไล่แล้ว ตัวอย่างเล็กๆ ที่คำนวณแล้ว การอ่านโจทย์ซ้ำแล้วภาวนาไม่ใช่ความเคลื่อนไหว ครบสามสิบนาที รับคำใบ้ไปหนึ่งหน่วย — หนึ่งประโยค หนึ่งสะกิด ไม่ใช่เฉลยพาเดิน — แล้วคำดิ่งกลับเข้าไปใหม่ การอ่านเฉลยเร็วเกินไปฝึกทักษะจริงอยู่ทักษะหนึ่ง: การจำได้ว่านี่คือเฉลย มันเป็นทักษะที่ผิดเรื่อง ♦ นี่คือเหตุผลเดียวกับที่เฉลยทุกข้อในหนังสือเล่มนี้นั่งอยู่หลังเส้นค้นหาคิด เส้นค้นนั้นแหละคือหลักวิชาการสอน

เช็กด้วยถนนเส้นที่สอง

ยืมมาจากวิศวกร ซึ่งเรียกมันว่า stress-testing และรันกันเป็นเครื่องจักร: เมื่อคำตอบในสนามแข่งถูกต้อง พวกเขาเขียนฝาแฝด brute-force ง่ายๆ ขึ้นมาอีกตัว แล้ว diff ผลของทั้งคู่จนกว่าตัวอย่างค้านจะโผล่ หรือความมั่นใจจะถูกหามาได้อย่างสมศักดิ์ศรี เวอร์ชันพลเรือนราคาสองนาทีก่อนประกาศชัยชนะ ถามว่า ถ้าฉันถูกจริง การคำนวณอิสระเส้นทางไหนจะเห็นด้วยกับฉัน? ภาค III จับตัวเองด้วยมาตรฐานนี้ — สูตรจำนวนบริเวณ

ในวงกลมที่ไล่สร้างทีละชั้นแล้วถูกอนุกรมเข้าผ่านสูตรของ Euler แผนเหรียญสิบสองเหรียญที่ถูกเช็กกับข้อมูลของมัน ถนนเส้นเดียวคือความเห็น ถนนสองเส้นที่มาบรรจบกันคือผลลัพธ์ ✦

การสอบเทียบความมั่นใจ: ซ้อมพูดคำว่า "ไม่รู้"

บทที่ 13 แสดงไว้ว่าการรู้ว่าตัวเองไม่รู้อะไร คือแต้มต่อมนุษย์ที่ทนทานที่สุดชนิดหนึ่ง — และแสดงให้เห็นว่าการขาดมันแลงมาด้วยอะไร ในรูปการอ้างอิงที่กุ่มขึ้นและอาชีพที่ระเหยหาย ขาวดีคือไม่มีคูเมืองแห่งไหนในบทนั้นฝึกได้ถูกกว่านี้ เครื่องมือคือดินสอหนึ่งแท่ง

โพรโทคอล: สัปดาห์ละครั้ง ทำคำถาม แต่ละข้อสร้างโซ่ประมาณค่าแบบ Fermi — แดกย่อย กระประมาณ คุณกลับ ทำของ 6-46 — แล้วผูกมัดกับค่าประมาณจุดเดียว บวกช่วงความมั่นใจ 80%: "ฉันมั่นใจ 80% ว่าค่าจริงอยู่ระหว่างขอบสองข้างนี้" จากนั้นเช็กให้คะแนนข้อที่เข้าเป้า และพล็อตอัตราเข้าเป้าสะสม เป้าหมายไม่ใช่ช่วงที่แคบ เป้าหมายคือช่วงที่ซื่อสัตย์: ช่วงที่ติดป้าย 80% แล้วจับความจริงได้ 80% ของครั้งจริงๆ การถ่วงช่วงให้กว้างขึ้นจนมันเล็กลงคือความก้าวหน้า ต่อให้มันรู้สึกเหี่ยวเฉาแค่ไหนก็ตาม ✦

เตรียมใจกับช่วงเริ่มต้นที่สะบักสะบอม ในการทดลองคลาสสิก ช่วง "มั่นใจ 98%" ของผู้คนบรรจุความจริงไว้เพียงราว 60% ของครั้ง (กลุ่มตัวอย่างของ Alpert and Raiffa ทำซ้ำได้ต่อเนื่องหลายทศวรรษ ๕๕) ความมั่นใจเกินจริงคือคำติพอลต์ของมนุษย์ ไม่ใช่คำหนีของนิสัย — และนั่นแหละคือเหตุผลว่าทำไมเส้นโค้งที่จดจริงจึงชนะภาพจำของตัวเอง แหล่งคำถามมีอยู่ทุกหนแห่ง: ตัวเลขระดับโลก (ประชากรของประเทศหนึ่ง ความยาวของแม่น้ำสายหนึ่ง) ตัวเลขส่วนตัว (อีเมลที่ยังไม่ได้อ่าน จำนวนก้าวถึงสถานี) และตัวเลขของหนังสือเล่มนี้เองก่อนคุณเปิดเช็ก — การจัดเรียงของเกม 15 มีกี่แบบที่ไปถึงได้จริง? Monty Hall อยู่ในหมวดนี้ด้วยเหตุผลเดียว: 6-33 คือหลักฐานยืนยันพื้นของสารบบว่าความมั่นใจกับความถูกต้องเป็นแกนคนละแกน แม้กระทั่ง — โดยเฉพาะอย่างยิ่ง — สำหรับผู้เชี่ยวชาญ จดหมายหมิ่นฉับยืนยันไว้อย่างนั้น

สองนิสัยที่ขยายผลบันทึกนี้ หนึ่งในแปดข้อทุกอย่าง: ก่อนเปิดเฉลยข้อไหนก็ตาม เขียนเปอร์เซ็นต์กำกับไว้ข้างๆ นิสัยนี้ลามประโยชน์ไปไกลกว่าปริศนามาก และมันคือนิสัยเดียวกับที่เกรดกำกับคำอ้างของหนังสือเล่มนี้แสดงบนหน้ากระดาษ — ๕๕ กับ ✦ คือช่วง

ความมั่นใจที่สวมชุดตัวพิมพ์ ✨ สอง ให้เกรดแหล่งข้อมูลของคุณด้วยวิธีเดียวกัน รวมถึงแหล่งที่เป็นเครื่องจักร ข้อนี้จะกลายเป็นเสารับน้ำหนักในอีกสองหัวข้อข้างหน้า

สุขอนามัยของการปีน

การปีนแต่ติดต่อการจัดตาราง แต่มันมีสุขอนามัย — เงื่อนไขที่ทำให้การรื้อโครงสร้างใหม่ ของบทที่ 4 เกิดบ่อยขึ้น สองข้อมีหลักฐานหนุน หนึ่งข้อเป็นแบบฝึก

การบ่มเป็นเรื่องจริง และผลก็พอประมาณ ✨ งานเมตา-วิเคราะห์การทดลองเรื่องการ บ่มตลอดร้อยปี (Sio and Ormerod, 2009) พบผลจริงแต่เล็ก แรงที่สุดเมื่อทางตันถูกหา มาด้วยหยาดเหงื่อจริงๆ และช่วงพักถูกเติมด้วยอะไรบางอย่าง — เดินเล่น งานบ้าน — ไม่ใช่ บดต่อ หรือโจทย์หินข้อที่สอง ข้อจำกัดเชิงกลไกสำคัญ ✨: การบ่มย่อยเฉพาะงานที่ทำไป แล้ว จอดโจทย์ที่ยังไม่ได้แตะ คือจอดความว่างเปล่า

การนอนช่วยมากกว่านั้น ✨ ในการทดลองใน Nature ที่ตอกประเด็นนี้จนติดแน่น (Wagner et al., 2004) ผู้แก้ฝึกงานตัวเลขที่ซ่อนทางลัดเอาไว้ หลังการนอนหนึ่งคืน พวกเขาค้นพบทางลัดบ่อยกว่าคนที่ตื่นอยู่ตลอดช่วงเวลาเท่ากันเกินสองเท่า โพรโทคอลเขียน ตัวมันเอง: ดิ้นให้สุด เขียนจุดที่ติดแบบเป๊ะๆ ลงหนึ่งประโยค — การเขียนคือขั้นตอน บรรจุกระสุน — จอดข้ามคืน วางกระดาดไขว้ไกล้มือ ฝึกบัวไม่ใช่เวทมนตร์ คำถามที่ถูก บรรจุแล้วต่างหากที่ใช้ ✨

แบบฝึก: สอบสวนเงื่อนไข ครึ่งที่ฝึกได้ของการปีนไม่ใช่การนั่งรอการรื้อโครง — คือการ ล่าการรื้อโครงบนกระดาด ติดมาสิบนาทีแล้ว? เขียนกฎทุกข้อที่คุณกำลังเชื่อฟัง กำกับ แต่ละข้อว่า STATED (โจทย์ระบุ) หรือ ASSUMED (สมมติเอง) แล้วบุกข้อ ASSUMED ที่ เก้าแก่ที่สุดก่อน นี่คือท่าของ 4-11 รันเป็นเช็กलिस्ट และบทเรียนของ 4-13 ทำให้เป็น ขั้นตอน: กำแพงที่ขวางคุณไม่เคยอยู่ในโจทย์ แบบฝึกเดียวกันในรางวัลตุลามาจาก 4-14: สำหรับทุกสิ่งในโจทย์ ถามว่า ถ้าไม่นับป้ายชื่อของมันแล้ว มันเป็นอย่างอื่นได้อีก? สามนาทื เป็นลายลักษณ์อักษร ทุกครั้ง การปีนแบบเช็กलिस्टโรแมนติกน้อยกว่าการปีนแบบสายฟ้า ฟาด และหาได้ง่ายกว่ากันมากโข ✨

คู่ซ้อม

ณ กรกฎาคม 2026 โมเดล AI แนวหน้าจะแก้ปริศนาคลาสสิกส่วนใหญ่ในสารบบนี้ได้ทันทีที่เห็น — พวกมันอยู่ในข้อมูลฝึกของมัน — และจะผลิตเฉลยที่ลั่นโหม่นอกมันใจให้ปริศนาสดใหม่ ซึ่งมักถูกต้อง และเป็นครั้งคราว ด้วยความมั่นใจเท่ากันเป๊ะ ผิด ๕๕ ส่วนผสมนี้ทำให้มันเป็นคู่ซ้อมที่ดีที่สุดเท่าที่เคยถูกสร้างขึ้น และเป็นเฉลยท้ายเล่มที่เลวร้ายที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ สามวิธีใช้ กับหนึ่งข้อห้าม

ให้มันผลิตโจทย์แปลก ขอทำเดิมในเครื่องแต่งกายใหม่: "นี่คือปริศนาและทำที่มันสอน [ตัวโจทย์ พร้อมข้อทำ] จงเขียนปริศนาใหม่สามข้อที่ใช้ทำเดียวกันแต่ผิวหน้าต่างออกไปโดยสิ้นเชิง — ห้ามมีเชือก ห้ามมีการเผา ไม่ต้องใส่เฉลย" นี่คือการโจมตีอาการทักษะติดผิวโจทย์ (surface-binding) โหมดลั้มเหลวที่อุตสาหกรรมฝึกสมองไม่เคยแก้ตก และมันคือเงื่อนไขเทียบสองอุปมาของ Gick and Holyoak ในเวอร์ชันอุตสาหกรรม: เครื่องจักรผันเครื่องแต่งกาย คุณสกดโครงสร้างกระดูก เครื่องจักรเก่งเรื่องเครื่องแต่งกายนัก

ให้มันตรวจ หลังคุณผูกมัดแล้ว แก่ก่อน เขียนคำตอบและเปอร์เซ็นต์ความมั่นใจของคุณลงไป — ผูกมัดแล้ว ลงวันที่แล้ว แก่ไขไม่ได้แล้ว — จากนั้นจึงสั่งเครื่องจักรให้โจมตีมัน ถ้ามันเห็นด้วย จดว่าเข้าเป้า ถ้ามันค้าน แปลว่าฝ่ายใดฝ่ายหนึ่งผิด และการทำให้เจอบว่าฝ่ายไหน คือเวิร์กเอาต์รอบที่สอง — บ่อยครั้งดีกว่ารอบแรก เพราะคราวนี้มีบางอย่างเป็นเดิมพัน ปริศนาคือสิ่งเวียนที่ปลอดภัยที่สุดในโลกสำหรับซ้อมงานนี้: ต่างจากเรียงความหรือกลยุทธ์ ปริศนามีความจริงภาคพื้น (ground truth) และบ่อยครั้งเช็คได้ด้วยการไล่นับ คำพยากรณ์ของภาค IV คือ การตรวจสอบเอาต์พุตเครื่องจักรที่มันใจจัด กำลังกลายเป็นงานของมนุษย์อย่างยั่งยืน ตรงนี้คุณซ้อมงานนั้นได้ โดยมีเฉลยรออยู่ท้ายเล่มของความเป็นจริง

ให้มันโค้ชสมุดบันทึกพลาด เดือนละครั้ง ยื่นสมุดบันทึกพลาดของคุณให้เครื่องจักรพร้อมคำถามเดียว: "แพตเทิร์นอะไรที่ฉันมองไม่เห็น?" การสรุปความล้มเหลวเล็กๆ ร้อยครั้งให้เหลือนิสัยสามอย่าง คืองานประเภทที่มันทำได้ดีพอดิบพอดิ — และการวินิจฉัยนี้ไม่ได้แย่งการดีนรณที่คุณจำเป็นต้องเก็บไว้เองแม้แต่น้อย

ข้อห้าม: อย่าอ่านเฉลยของมันก่อน เด็ดขาด ไม่ใช่ในฐานะมารยาท — ในฐานะกลไก ๖ การดีนรณคือตัวกระตุ้นการฝึก เฉลยคือตัวต้านการฝึก จ้างวานให้ใครดีนแทน แล้วคุณจะได้เก็บจุดอ่อนไว้กับตัวถาวร พร้อมงานโปรดักชันชั้นเยี่ยม

คู่ซ้อม	ไม้ค้า
โจทย์แปลงก่อนลงมือแก้	เฉลยก่อนได้ต้น
โจมตีคำตอบที่คุณผูกมัดแล้ว	ตอบแทนที่ความพยายามของคุณ
คำใบ้หนึ่งประโยค เมื่อขอ หลังผ่านไป 30 นาที	เฉลยพาเดินเป็นคำเริ่มต้น
หาแพตเทิร์นในสมุดบันทึกพลาดของคุณ	เข้ามาแทนที่สมุดบันทึกพลาด

สมมาตรข้อหนึ่งสมควรถูกพูดออกเสียง: เครื่องจักรมั่นใจทั้งที่ผิด ในแบบเดียวกันเป๊ะกับที่บันทึกสอบเทียบของคุณกำลังสอนคุณไม่ให้เป็น จดอัตราเข้าป่าของคำตัดสินมันไว้แบบเดียวกับที่คุณจดของช่วงความมั่นใจตัวเอง เส้นโค้งสอบเทียบสองเส้น โตะเดียว

ฝึกเฉพาะสิ่งที่ทันทาน

บทที่ 13 ทำแผนที่คู่มือไว้แล้ว เครื่องมือทุกชิ้นในบทนี้ถูกเลือกมาให้ขึ้นอยู่กับคู่มือเมืองสักแห่ง:

คู่มือ (Ch 13)	การฝึก (บทนี้)
รู้ว่าตัวเองไม่รู้	บันทึกสอบเทียบ ป้ายความมั่นใจบนทุกคำตอบ
การเรียนรู้ต่อเนื่อง	สมุดบันทึกพลาด บวกการทบทวนข้อพลาดแบบเว้นระยะ — คุณอัปเดตรายวัน ส่วนโมเดล ณ กรกฎาคม 2026 ส่วนใหญ่อัปเดตระหว่างเวอร์ชัน ๕๕
ประสิทธิภาพการเรียนรู้	Upsolving — รีดสูงสุดจากขนาดตัวอย่างเท่ากับหนึ่งความล้มเหลว
รสนิยม และการเลือกสิ่งที่สำคัญ	บันไดที่คุณเลือกเอง จิตของคนออกโจทย์จาก Ch 8 สิ่งที่คุณเก็บไว้ในโหมดระคองฝีมือ
ความเป็นเจ้าของและความรับผิดชอบ	ชื่อของคุณบนสมุด เปอร์เซ็นต์ของคุณบนทุกคำตอบ

ไม่มีอะไรตรงนี้ต้องการสถาบัน ค่าสมาชิก หรืออุปกรณ์สวมใส่ มันต้องการวันละยี่สิบถึงสี่สิบนาที่ สมุดหนึ่งเล่ม และความทนทานต่อการผิดให้เห็นกันจะๆ บนกระดาษ — ราคาเดียวที่ความถี่ไม่เคยเรียกเก็บ และการเรียนรู้เรียกเก็บเสมอ

บทที่ 16 คือบทนี้ที่มีวันที่กำกับ

บทที่ 16

หลักสูตรสามสิบวัน

บทที่ 15 มอบเครื่องมือ บทนี้ไ้ส่วนที่ไ้หม้: สามสิบวัน วันละยี่สิบถึงสี่สิบนาที่ ทุกอย่างดิงมาจากเนื้อหาที่อยู่ในหนังสือเล่มนี้แล้วทั้งสิ้น ไ้ต้องใช้อุปกรณ์อะไรนอกจากสมุดหนึ่งเล่ม (สมุดบันทึกพลาด) นาฬิกาจับเวลา และบางครั้งเหรียญ ไ้ขีดไฟ หรือไฟหนึ่งสำหรับ

วิธีอ่านตัวอ้างอิง ปรีศนาถูกเรียกด้วย บท-หมายเลข: **5-6** แปลว่าบทที่ 5 ปรีศนาสารบบหมายเลข 6 ส่วน **C-30** แปลว่าภาคผนวก ค — คลังสำรอง — ปรีศนาสารบบหมายเลข 30 พิธีเดียวกันแต่ไ้มีเนื้อบท่อนเครื่องให้ ตัวเลขหลังจุดคือหมายเลขสารบบของปรีศนาพิมพ์อยู่ในหัวข้อของมนตรงจุดที่คุณพบมันครั้งแรก ไ้มีอะไรถูกเล่าซ้ำที่นี้ — ทุกตัวอ้างอิงพาไปลงที่พิธีที่ครบจบในตัว มีตัวโจทย์ เส้นคั่นหยุดคิด และเฉลยอยู่ไ้ด้มัน **สด (cold)** แปลว่า: ทำจากตัวโจทย์เท่านั้น ปิดเฉลยเอาไว้ วินัยกันสบอยล์จาก วิธีใช้หนังสือเล่มนี้ บัดนี้กลายเป็นเสารับน้ำหนักแล้ว

คุณเคยเห็นปรีศนาพวกนี้มาแล้ว นั่นคือประเด็น ไ้ใช่ข้อบกพร่องของแผน หลักสูตรนี้ไ้ไม่ได้สอบว่าคุณจำคำตอบได้ไหม มันสอบว่าทำมาถึงมือหรือไม่ — คุณสร้างเส้นทางขึ้นใหม่ เรียกชื่อแพตเทิร์น และรู้สึกถึงสัญญาณจำทำที่จุดติดขึ้นก่อนความทรงจำเรื่องคำตอบจะมาถึง ได้หรือเปล่า การแก้ไขจากหน้ากระดาษเปล่าเป็นคนละการกระทำกับการนีกออก และสมุดบันทึกพลาด (ซึ่งเรียกร่องเหตุผลเป็นลายลักษณ์อักษร ไ้ใช่คำตอบ) คอยคุมให้สองสิ่งนี้ซื่อสัตย์ต่อกัน จุดไหนที่ความจำแอบปนเปื้อนจริง นาฬิกาจะจับได้: การสร้างใหม่จะเร็วเมื่อทำถูกครอบครองแล้ว และจะกระท่อนกระแท่นเมื่อสิ่งที่ครอบครองมีแค่คำตอบ

กฎ พูดครั้งเดียว:

1. ยี่สิบถึงสี่สิบนาที่ ตั้งนาฬิกาจับเวลา หยุดที่สี่สิบ — ที่ขอบ ไ้ใช่ทั้งหมดแรง
2. สมุดบันทึกพลาดคือครึ่งหนึ่งของการฝึก ทุกการพลาดไ้้รายการห้าบรรทัดจากบทที่ 15 และทำที่พลาดต้องถูกเรียกชื่อ

3. กฎการเดิน: ยี่สิบนาทีของความเคลื่อนไหวจริงก่อนแอบดูอะไรทั้งนั้น จากนั้นคำใบ้หนึ่งหน่วย แล้วกลับเข้าไปใหม่
4. ข้อที่พลาดต้อง upsolve ภายในวันเดียวกัน ไม่งั้นก็เข้ากองไฟทบทวน ไม่มีข้อไหนถูกทอดทิ้ง
5. วันที่ขาดคือวันที่ขาด อย่าทบทวนสองเท่า กองไฟเป็นคนนับแต้ม ไม่ใช่ปฏิทิน
6. ใช้ AI ตามบทที่ 15 เท่านั้น: โจทย์แปลง และการโจมตีหลังผูกมัด ห้ามดูเฉลยของมันก่อน เด็ดขาด

วันกองไฟ (วันสุดท้ายของแต่ละสัปดาห์) แปลว่า: แก่ซ้ำ สด ทุกข้อพลาดที่สมุดสะสมไว้ และจดเวลาแก่ซ้ำ **ชุดสอบเทียบ** แปลว่า: คำถาม Fermi ห้าข้อ พร้อมช่วงความมั่นใจ 80% ให้คะแนน ตามโปรโตคอลของบทที่ 15

วันที่ศูนย์ สิบนาที ลอกแม่แบบรายการห้าบรรทัดลงบนปกด้านในของสมุด คั่นหน้าภาคผนวก ก ไว้ มันจะถูกเปิดทุกวัน แล้วรันชุดสอบเทียบ 0 — ห้าคำถาม ห้าช่วง ให้คะแนน และลงวันที่ — เพื่อให้เส้นโค้งมีเส้นฐานที่ไม่มีใครย้อนกลับมาประจบมันได้ที่หลัง หลักสูตรนี้วัดความเปลี่ยนแปลง และความเปลี่ยนแปลงต้องมี "ก่อน"

กายวิภาคของหนึ่งเซสชัน

สามสิบนาทีชุดเดิม ซ้ำและให้ดู เพื่อให้ตารางข้างล่างพูดสั้นๆ ได้:

- **นาທີ 0–3** — **อ่านและวางกรอบ** อ่านโจทย์สองรอบ เขียนหนึ่งบรรทัด: โจทย์นี้กลืนเหมือนปัญหาแบบไหน และกลืนนั้นชี้ไปที่ทำอะไร บรรทัดนี้คือเดิมพันจริงของวันนี้ สมุดจะเป็นคนให้เกรดมัน
- **นาທີ 3–23** — **เคลื่อนไหว** การแทนโจทย์ที่ลอง กรณีที่ไล่ ตัวอย่างเล็กๆ ที่คำนวณ เมื่อติดครบสิบนาทีในช่วงนี้ รันแบบฝึกหัดสอบสวนเงื่อนไขของบทที่ 15: กฎทุกข้อที่กำลังเชื่อฟัง กำกับว่า STATED หรือ ASSUMED
- **นาທີที่ 23** — **จุดตัดสินใจเรื่องคำใบ้** ยังไม่มีอะไรขยับ? รับคำใบ้หนึ่งหน่วย: อ่านซ้ำ เฉพาะบรรทัดทำคิของปริศนาข้อนั้น — ชื่อตัวหนา ไม่ใช่ทั้งย่อหน้า — แล้วกลับเข้าไปใหม่

- **5 นาทีสุดท้าย — ลงบัญชี** แก่ได้หรือไม่ได้ก็ตาม เขียนรายการ: ทำ พร้อมชื่อ สัญญาณ ในหนึ่งประโยค และประเภทการพลาดหากเป็นการพลาด เมื่อพลาด ให้แก้ upsolve ภายในวันนี้ หรือเก็บการ์ดเข้ากอง

คนสองคนรันหลักสูตรนี้บนหนังสือเล่มเดียวได้ และมันยิ่งดีขึ้น: สลับวันกันเป็นผู้แก้และผู้ตรวจ โดยผู้ตรวจถือกฎของบทที่ 15 — คำใบ้หนึ่งประโยคเมื่อถูกขอ โจมตีหลังผูกมัด ห้ามบอกเฉลย การอธิบายเท่าที่คุณพึงใช้ คือวิธีที่ถูกที่สุดเท่าที่รู้จักในการเช็กว่าคุณครอบคลุมมันจริงหรือไม่ ✦

สัปดาห์ที่ 1 — กรอบและนิรนัย

กล่ามนำการปิ้งของบทที่ 4 ตามด้วยวินัยการไล่ผลบังคับของบทที่ 5

วัน	งาน (20–40 นาที)	ลงสมุด
1	4-11, 4-12, 4-13 สด ก่อนเริ่มแต่ละข้อ: เขียนหนึ่งบรรทัดว่ากรอบที่คุณคิดว่าตัวเองอยู่ในนั้นคืออะไร	รายการแรกๆ เรียกชื่อทุกทำจากภาคผนวก ก ไม่ว่าเข้าเป้าหรือพลาด
2	4-14, 4-15 ตามด้วยแบบฝึก: หยิบของในบ้านสามชิ้น แต่ละชิ้นเขียนว่านอกจากป้ายชื่อของมันแล้ว มันเป็นอย่างอื่นได้อีก	ข้อสมมุติไหนที่คุณกอดไว้นานที่สุด และใครเป็นคนยืนยันใส่มือคุณ
3	4-16 แล้วต่อด้วย 5-2 ปิดท้ายด้วยการแต่งบทสนทนา อัดวินกับจอมลวง (knights-and-knaves) ของตัวเองหนึ่งบทที่มีคำตอบเดียว	สัญญาณจำทำของแต่ละท่า ท่าละหนึ่งประโยค
4	5-3, 5-4	จุดที่ความผิดพลาดที่ถูกการันตีไว้ กลายเป็นข้อมูลที่ใช้การได้
5	5-5 — ตารางเต็ม รวดเดียวจบ วันนี้ 40 นาทีเต็ม	นับจำนวนครั้งที่คุณเดา มีครั้งไหนเดาไปทั้งที่ตาบังคับยังวางอยู่บนโต๊ะไหม
6	5-6 แล้วต่อด้วย 5-7	เมตา-ข้อเท็จจริงที่คุณเกือบทั้งเปล่า อัลกอริทึมตะกละที่คุณเกือบหลงเชื่อ

วัน	งาน (20–40 นาที)	ลงสมุด
7	วันกองไฟ ทุกข้อพลาดของสัปดาห์ที่ 1 สด จับเวลา	อัตราเรียกชื่อ: พลาคที่เรียกชื่อได้ ÷ พลาคที่จดไว้

สัปดาห์ที่ 2 — ตัวเลขและโอกาส

บทที่ 6: การอนุรักษ์ปริมาณ การเวียนเกิด เลขโคตได้เงื่อนไขบิบ และทำความเข้าใจจะเป็นที่ลงโทษสัญญาตญาณดีๆ

วัน	งาน (20–40 นาที)	ลงสมุด
8	6-26, C-29	การอนุรักษ์ปริมาณอันไหน ปิดข้อโต้แย้งอันไหน
9	C-30, C-31 เล่น C-31 ด้วยเหรียญสามเหรียญบนจานรองสามใบ จนการเวียนเกิดเข้านี้	การจับคู่ และข้อยกเว้นของมัน ตัวตนร่างเล็กที่คุณเลือกฝากใจ
10	6-41 และ 6-48 ถ้าเวลาเหลือ	เงื่อนไขที่บิบแน่นที่สุด — คุณเริ่มที่มันหรือเดินหลงเข้าไปเจอ?
11	C-21, C-47	จุดที่สัญญาตญาณค้าน สิ่งที่คุณคิดตอบกลับมา
12	6-32 แล้วต่อด้วย 6-33 จากนั้นแจกไพ่สามใบ เล่น 6-33 ทั้งสองแบบยี่สิบรอบ พร้อมขีดนับ	ความถี่จากการจำลองของคุณ วางเทียบข้างค่าทางทฤษฎี
13	6-34, 6-35	ข้อละหนึ่งประโยค: ขั้นตอนแบบไหนเป็นตัวผลิตข้อมูลชุดนี้
14	6-46 แล้วต่อด้วย ชุดสอบเทียบ 1 และ วันกองไฟ สำหรับข้อพลาดของสัปดาห์	ช่วงที่เข้าเป้า: n จาก 5 จุดแรกบนเส้นโค้ง

สัปดาห์ที่ 3 — ทำสายโอลิมปิก

บทที่ 8–11 พอร์แมตเปลี่ยน: แต่ละวัน อนุমানตัวอย่างประกอบขึ้นใหม่แบบสด — จากตัวโจทย์เท่านั้น สร้างเส้นทางจากศูนย์ — แล้วรันแบบฝึกของมัน นี่คือโรงยิมประจำบ้านของเครื่องมือทั้งสิบหกชิ้น

วัน	งาน (20–40 นาที)	ลงสมุด
15	หลักเรียงกราฟ (Ch 9): บทพิสูจน์ห้าจุดในจัตุรัส สด ตามด้วยแบบฝึก: ขวาลอนดอนเส้นผมเท่ากัน งานเลี้ยงที่มีคนจำนวนเพื่อนเท่ากัน	กล่องที่คุณประดิษฐ์ขึ้น — และอะไรบังคับจำนวนของมัน
16	ปริมาณไม่แปรเปลี่ยน (Ch 9): การลดกระดานเลข 1 ถึง 10 สด แบบฝึกกึ่งค่าเฉลี่ย แล้วย้อนดูการสลับของ 2-38 ในฐานะเรื่องเล่าด้วยพลวัต	ปริมาณที่รอดจากการเดินทางมาก และคุณหามันเจอได้อย่างไร
17	ตัวสุ่มและสมมาตร (Ch 9): ราชาแห่งทัวร์นาเมนต์ เกมโต๊ะกลม แล้วเล่น C-43 ด้วยกองเหรียญ 3, 5, 7 จนการตอบโต้แบบถ่วงสมดุลเป็นรีเฟล็กซ์	ผู้ทำซึ่งตัวสุ่มที่คุณไล่รายชื่อ ก่อนจะเจอตัวที่ใช้
18	การระบายสี (Ch 9): กระดาน 10×10 ปะทะแผ่น 1×4 สด ตามด้วยแบบฝึก T-tetromino	การระบายสีแรกที่คุณลองและทำโมรูปทรงของแผ่นจิ้งวิได้มัน
19	อุปนัยและคิดย้อนจากปลายทาง (Ch 10): ขั้นการปูกระเบื้อง tromino แบบเลือกช่องใดก็ได้ แล้วเกมแข่งไปให้ถึง 100 กับคู่แข่งหนึ่งคน (หรือมือซ้ายของตัวเอง)	จุดที่สมมติฐานเปล่าๆ รั่วและสัณหาระที่คุณบรรทุกเพิ่มเข้าไป
20	การจำลองแบบและนับสองทาง (Ch 11): อนุমান Königsberg ใหม่จากแผนที่เปล่า สามะโนห้องเรียน แล้วลุยเต็ม 40 นาทีกับเอกลักษณ์จุดตรง (IMO 1987, Problem 1) ภายใต้กฎการเดิน	เซตอุบัติการณ์ เรียกชื่อให้ชัด — "คู่ (x, y) ที่ซึ่ง..."
21	วันกองไฟ บวก ชุดสอบเทียบ 2	อัตราเรียกชื่อ ช่วงเข้าเป้าสองจุดก็เป็นเส้นโค้งแล้ว

สัปดาห์ที่ 4 — ห้องบอส และกระเจกเงา

สัตว์ร้ายของบทที่ 7 วันละตัว — ★★★★★ หนังสือคือหนึ่งเซสชันเต็ม — ถักเข้ากับสายการสอบเทียบ สัปดาห์นี้ปิดท้ายด้วยการวัดตัวคุณเอง

วัน	งาน (20–40 นาที)	ลงสมุด
22	7-8 ก่อนแต่จะงานตาซัง: เขียนงบข้อมูล — คำตอบที่เป็นไปได้กี่แบบ ผลลัพธ์ต่อการชั่งที่ทาง	งมมาก่อนการออกแบบหรือเปล่า? ทำ พร้อมชื่อ
23	7-9 ออกแบบโปรโตคอลของตัวเองบนกระดาด ก่อน อ่านอะไรทั้งนั้น แล้วค่อยเทียบ	จุดที่โปรโตคอลของคุณรั่ว — การนับซ้ำ ความกำกวม
24	7-10 เติมนูนัยออกเสียงสำหรับชาวเกาะหนึ่ง สอง สามคน ก่อนขยายสเกล	ชั้นบันไดที่มันเล็กรู้สึกเหมือนกลลวง
25	7-37 แล้วสับไฟจริง รันกลยุทธ์สิบบรอบ ไล่ตามวัฏจักรด้วยมือ	อัตราลดจากการจำลอง วางข้างค่าจริง ประโยคเรื่องสหสัมพันธ์ ในคำพูดของคุณเอง
26	7-44 แล้วต่อด้วย ชุดสอบเทียบ 3	ปลายเกมที่คุณปักหมุดก่อนช่วงเข้าเป้า
27	7-49 — ยอดเขา เต็มสี่สิบนาที คำใบ้เดียวที่อนุญาตคือการอ่าน 5-6 ซ้ำ	ตัวกรองทุกตัวในบทสนทนาเล่าใหม่ในคำพูดของคุณเอง
28	7-50 เขียนหนึ่งหน้า: คุณคิดว่าคำหนิอยู่ตรงไหน พร้อมความมั่นใจเป็นเปอร์เซ็นต์ แล้วจึงกลับไปอ่านการวินิจฉัยที่เป็นตัวเลือกอีกครั้ง	การวินิจฉัยและเปอร์เซ็นต์ของคุณ — เก็บไว้ในที่ที่คุณย้อนมาอายุมันได้ในภายหลัง ซึ่งนั่นแหละคือการฝึก
29	วันตรวจบัญชี ไม่มีปริศนาใหม่ คำนวณ: อัตราเรียกชื่อตลอดสี่สัปดาห์ เส้นโค้งสอบเทียบ (ถึงตอนนี้สิบห้าช่วง) เวลาแก้ข้อเทียบครั้งแรกกับรอบกองไฟ เขียนสามประเภทพลาดอันดับต้นของคุณ	ตัวเลขสามตัว ตัวละหนึ่งประโยค หลักสูตรส่วนตัวของคุณ ในลายมือของคุณเอง
30	ทางออก (1) แก้ข้อห้าข้อพลาดที่ดื้อที่สุดของคุณ สด (2) สร้างปริศนาของตัวเองหนึ่งข้อรอบทำโปรด — แก่นก่อน เครื่องแต่ง	ปริศนาที่คุณสร้างและทำที่มันซ่อนไว้ ผู้แก้ของคุณหามันเจอหรือไม่

วัน งาน (20–40 นาที)

ลงสมุด

ภายหลัง ตามศาสตร์คนออกโจทย์ของบทที่ 8 — แล้วยื่นให้
คนจริงหนึ่งคน (3) เขียนแผนโหมดประครองฝีมือของเดือนหน้า

ทำไมต้องเรียงแบบนี้

ลำดับนี้ถูกวิศวกรรมมา ไม่ใช่ของประดับ กรอบมาก่อน เพราะทุกสัปดาห์ถัดไปพึงพาการสังเกตเห็นเงื่อนไขที่ตัวเองสร้างขึ้นเอง และการสังเกตแบบนั้นติดตั้งได้เร็วที่สุด (ปริศนา ★1–2 หนึ่งสัปดาห์ก็เชื่อมั่นได้) นิรณัยตามมาทันที เพื่อให้วินัยการไล่ผลบังคับ — ห้ามเดา ตราบใดที่ตาบังคับยังเหลือ — แข่งตัวก่อนเนื้อหาความน่าจะเป็นจะมาถึงและลงโทษการคิดเงื่อนไขแบบหละหลวม ตัวเลขและโอกาสนั่งอยู่สัปดาห์ที่ 2 เพราะมันจ่ายข้อมูลสอบเทียบชุดแรกและความอภัยอย่างซื้อตรงครั้งแรกให้หลักสูตร Monty Hall ได้ผลดีกว่า กับผู้แก้ที่จดสมุดมาแล้วสิบเอ็ดวัน ทำสายโอลิมปิกครองสัปดาห์ที่ 3 ในฐานะครอสเทรนนิงโดยเจตนา: เครื่องมือขนาดเท่าทั้งบท ถูกอนุมานขึ้นใหม่แทนที่จะถูกอ่านซ้ำ ในจังหวะที่ท่าของสองสัปดาห์แรกเริ่มเสี่ยงจะนอนอยู่ในความสบาย และห้องบอสมาเป็นลำดับสุดท้าย ไม่ใช่ในฐานะพิธีรับปริญญา แต่เพราะปริศนา ★★★★★ คือของประกอบ — 7·8 คืองบข้อมูลสามชุดนิรณัย 7·37 คือความน่าจะเป็นชี้หลังโครงสร้าง — และของประกอบจะฝึกได้ก็ต่อเมื่อชิ้นส่วนของมันกลายเป็นรีเฟล็กซ์แล้วเท่านั้น วันกระจกเงา (29–30) ปิดวงที่สมุดเปิดไว้ตั้งแต่วันที่ 1: หลักสูตรจบลงด้วยการวัดตัวมันเอง ซึ่งคือนิสัยที่มันหวังจะทิ้งไว้ให้มากที่สุด

โหมดประครองฝีมือ

หลังวันที่ 30 สัปดาห์ละสองเซสชันก็รักษาทุกอย่างที่เดือนนั้นสร้างไว้ได้ น้อยกว่านั้น สัญญาณจำทำจะจางลงเป็นเกร็ดความรู้ มากกว่านั้นเป็นทางเลือก ไม่ใช่ข้อบังคับ

เซสชัน A — ของใหม่ (30 นาที) เลือกหนึ่งอย่าง: ปริศนาสารบบที่หลักสูตรไม่เคยจัดคิว (มานั่งสำรอง: 6·22, 6·48 ถ้าข้อไหนยังไม่ถูกใช้ และที่เหลือของภาคผนวก ค — C·23, C·24, C·36, C·45 ในบรรดาสิบเจ็ดข้อของมัน) หรือ ★★★★★ ของภาค III ที่ลุยจริงภายใต้กฎการเดิน หรือโจทย์หนึ่งข้อจากโลกภายนอก — ประตูลิสต์ไว้ใน อ่านต่อจากตรงนี้

(รวมเล่มของ Gardner สักเล่ม, Project Euler, ตาราง ARC) — พร้อมพิธีครบชุด: ดิน แก้ว เรียกชื่อท่า จดข้อพลาดลงสมุด

เซสชัน B — กองไฟ (20 นาที) ทุกข้อพลาดที่อายุเกินสองสัปดาห์ แก้วซัสต จับเวลาใหม่ รายเดือน: ชุดสอบเทียบหนึ่งชุด และการตรวจบัญชีสมุด — อัตราเรียกชื่อ เส้นโค้ง ประเภทพลาดอันดับหนึ่ง ถ้าประเภทไหนไม่ยอมหด บทของมันจะกลายเป็นวัตถุดิบของ เซสชัน A จนกว่ามันจะหด ใบสั่งยา:

ประเภทพลาดที่วนซ้ำ	ใบสั่งยา
ผิดกรอบ	งานม้านั่งสำรองบทที่ 4 แบบฝึกหัดสอบสวนเงื่อนไขก่อนทุกเซสชัน เป็นเวลาสองสัปดาห์
เดาทั้งที่ตาบอดบอดเหลือ	แก้วซัสตบทที่ 5 พร้อมตัวนับการเดาไว้ริมหน้ากระดาน
พลาดเงื่อนไขความน่าจะเป็น มองข้ามขั้นตอนผลิตข้อมูล	บล็อกความน่าจะเป็นของบทที่ 6 จำลองด้วยไฟจนทฤษฎีกับชีวิตนับตรงกัน
กระโดดโดยไม่พิสูจน์	วินัยพิสูจน์แบบสลับชั้นของบทที่ 10 ห้ามอ้างอัลกอริทึมตะกละโดยไม่มีบทพิสูจน์บรรทัดเดียวหรือตัวอย่างค้านของมัน
งานเสมียนหลุด	ซาลง 20% เช็กด้วยถนนเส้นที่สองก่อนประกาศ — เครื่องมือขั้นที่หกของบทที่ 15

กฎยืนพื้น ปรีศนาใดก็ตามที่พบกลางป่านอกเล่ม — สัมภาษณ์งาน วงสังสรรค์ ไลน์ — ได้พิธีครบชุด หลักสูตรจบได้ แต่พิธีไม่จบ

มาตรวัดความก้าวหน้าที่คุณจะได้

ตัวเลขสามตัว ซึ่งไม่มีตัวไหนโง่ได้โดยไม่รู้ตัว

1 • พลาดที่เรียกชื่อได้ สัดส่วนของข้อพลาดในสมุดที่ทำที่พลาดได้ชื่อของมันจากภาคผนวก ก คาดหวังราวครึ่งหนึ่งในสัปดาห์ที่ 1 และเกือบทั้งหมดภายในสัปดาห์ที่ 4 — ไม่ใช่เพราะคุณพลาดน้อยลง (มันไม่ควรเกินเรื่องนั้นอยู่แล้ว) แต่เพราะคลังศัพท์ได้กลายเป็นการรับรู้ ตัวเลขนี้คือทักษะ: การจำทำได้ วัด ณ วินาทีของความล้มเหลว

2 • เส้นโค้งสอบเทียบ ช่วง 80% ของคุณควรจับความจริงได้ราว 80% ของครั้ง — หลังผ่านไปสิบห้าหรือยี่สิบช่วง อัตราเข้าเป้าระหว่าง 70 ถึง 90 คืองานที่ซื้อสัตย์ ระวังความล้มเหลวที่แต่งตัวเหมือนความสำเร็จ: ช่วงที่กว้างเสียจนเข้าเป้าตลอด ไม่ได้ฝึกอะไรเลย เกมนี้คือความแม่นยำภายใต้ความซื้อสัตย์ — ช่วงที่แคบลง พร้อมกับ อัตราเข้าเป้าที่ยั่งยืน

3 • เวลาแก้ไขของข้อผิดพลาด นาฬิกาของกองไฟ ที่ควรร่วงลงเรื่อยๆ ข้อผิดพลาดที่เคยกินสามสิบนาทีกับค่าใบสามหน่วย ถูกแก้ไขจบในหกนาทีกว่าวัน แปลว่ามันเข้ามือแล้ว ข้อผิดพลาดที่แก้ไขแล้วค้างอยู่ที่สิบนาทีสองรอบติด กำลังบอกคุณว่าต้องกลับไปอ่านบทไหนซ้ำ — จงเชื่อมั่น

คาดหวังไว้เลยว่าตัวเลขจะออกอาการ และรู้ว่าอาการนั้นแปลว่าอะไร **ที่ราบสูง**ของอัตราเรียกซื้อราวสัปดาห์ที่ 3 เป็นเรื่องปกติ: เครื่องมือสายโอลิมปิกท่วมคลั่งศัพท์ชั่วคราว และการรับรู้ตามหลังการเก็บเกี่ยวอยู่ไม่กี่วัน อัตราเข้าเป้าสอบเทียบที่ **ร่วงลง**มักเป็นข่าวดีในเสื้อคลุมของข่าวร้าย — มันโผล่มาตรงจังหวะที่ช่วงเริ่มแคบลงพอดี และทางแก้คือแคบให้น้อยลงหน่อย ไม่ใช่เลิกแคบ **การถดถอย**บนกองไฟ — ข้อผิดพลาดที่พลาดซ้ำ — คือเหตุการณ์ที่ให้ข้อมูลมากที่สุดชิ้นเดียวที่หลักสูตรนี้ผลิตได้: มันชี้ตัวทำที่ถูกต้องจำแทนที่จะถูกรับรอง และมันได้รายการสมุดครั้งที่สองทันที โดยบรรทัดที่ 4 ต้องมีคำตอบต่างจากคราวก่อน ถ้าปริศนาข้อเดิมผลิตการพลาดข้อเดิมสองครั้ง แปลว่าข้อนั้นผิด ช่องว่างจริงอยู่ลึกลงไปอีกหนึ่งชั้น และหนึ่งเซสชันที่จ้องช่องว่างนั้นมีค่าเท่ากับของใหม่หนึ่งสัปดาห์

และสิ่งที่ไม่ใช่มาตรวัด เรียกชื่อไว้เพื่อให้ปฏิเสธมันได้ถูกตัว: ความยาวสตรีก จำนวนปริศนาต่อวัน ชั่วโมงที่สะสม และความรู้สึกว่าเซสชันนี้ฉลาดแค่ไหน — ตัวสุดท้ายคือความสิ้น นักโกหกที่มีหลักฐานมัดตัวจากบทที่ 15 ๕ สามสิบวันซื้อการไต่ขึ้นที่วัดได้ของสิ่งที่ข้อสอบ IQ รวมคะแนนไม่ได้เลยแม้แต่น้อย และหนังสือเล่มนี้จะไม่แสร้งว่าได้ มันซื้อทำสามสิบสองเท่าที่ความเร็วของการจำได้ สมุดหนึ่งเล่มที่รู้จักโหมดล้มเหลวของคุณดีกว่าข้อสอบใดๆ และเส้นฐานการสอบเทียบที่มีอาชีพส่วนใหญ่ไม่เคยมี นั่นไม่ใช่ทุกอย่าง แต่มันมากกว่าที่เกือบทุกคนบนโลกมี

ประตุ

สามสัปดาห์ไม่ใช่ความช้าของขั้นสุด มันคือสิ่งที่ดีกว่านั้น: นิยายการทำงาน และคลังศัพท์ที่ตาของคุณนั่นเองโดยไม่ต้องถูกสั่ง

สฟิงซ์รออยู่ที่ประตูของหนังสือเล่มนี้มาตั้งแต่บทที่ 1 และนางไม่แก่ลงเลย นางไม่เคยเป็นอสุรบนถนนสู่ธีบส์ (Thebes) จริงๆ หรือก นางคือประตุทุกบานที่มีคำถามแขวนอยู่ ซึ่งลงโทษการอ่านแบบตรงตัวอักษร: โจทย์สัมภาษณ์ที่ถูกสร้างมาให้อ่านพลาด แผนภูมิที่สะอาดเกินไป ข้อสัญญาที่ผิวหน้าซ่อนคำสั่งจริงเอาไว้ เอาต์พุตเครื่องจักรมันใจจัดที่ลื่นไหล มีอ้างอิง และผิด แก้ให้ได้หรือถูกกิน — เงื่อนไขอับเด็ดแล้ว ประตูบานเดิม

ปริศนาคำทายข้อแรกของนาง — สีขายามเช้า สองขายามเที่ยง สามขายามค่ำ — คุณอาจสังเกตแล้วว่า ยังเปิดค้างอยู่ สิบหกบทผ่านไป หนังสือเล่มนี้ยังไม่ได้ตอบมัน หนังสือต้องปิดกล่องของตัวเอง และเล่มนี้ปิดมันที่หน้าสุดท้าย ที่ซึ่งบันทึกท้ายเล่มเก็บคำตอบไว้จะไปเปิดดูเมื่อไรก็ได้ตามใจ แต่จงสังเกตสิ่งที่สามสัปดาห์นี้เปลี่ยนไป: คุณไม่ต้องใช้คำตอบเพื่อผ่านนางอีกต่อไปแล้ว คุณมีท่า คำตอบหนึ่งคำไขแม่กุญแจได้ดอกเดียว แต่ทำหนึ่งท่าเปิดประตูได้ทั้งแนวระเบียง — และนั่นคือเหตุผลที่ดัชนีท้ายเล่มเป็นส่วนเดียวของหนังสือเล่มนี้ที่ถูกสร้างมาให้อ่านเข้าไปตลอดชีวิตที่เหลือของคุณ

คู่มือจบแล้ว โรยิมยังไม่จบ

ภาคผนวก ค — คลังสำรอง

บทต่างๆ ใช้ปริศนาไปสามสิบสามข้อจากห้าสิบข้อของชุดหลัก สิบเจ็ดข้อนี้คือส่วนที่ทำให้ครบชุด ที่นี้ไม่มีบทไหนอันเครื่องให้คุณ และไม่มีชื่อหัวข้อคอยกระซิบบอกทำคิดล่วงหน้า — ซึ่งนั่นแหละคือคุณค่าของพวกมันต่อหลักสูตรฝึกในบทที่ 16 ของสดทั้งนั้น: จงแก้แบบมือเปล่า

★ 17 · ปริศนาคำทายแห่งสฟิงซ์

"สิ่งใดเดินสี่ขาในยามเช้า สองขาในยามเที่ยง และสามขาในยามเย็น?"

สฟิงซ์กำลังรออยู่

เฉลย. ขอบิดไว้ — นี่คือนิศนาข้อเดียวในเล่มที่คุณต้องแลกคำตอบด้วยการอ่านให้จบ มันยืนเฝ้าประตูมาตั้งแต่บทที่ 1 และบันทึกท้ายเล่มจะปิดคดีให้บนหน้าสุดท้ายของหนังสือ ถ้าการรอมันเหลือทน — นั่นแหละคือความหมายของการรอ

ทำ — เปลี่ยนสเกลเวลา. เมื่ออ่านตามตัวอักษรแล้วได้สุรกาย จงย่อ-ขยายเวลาเสียใหม่ หรือผูกความหมายของคำสັกคำเสียใหม่ — คำนามทุกคำในปริศนาคำทายคือช่องเสียอุปมา

★★ 21 · เชือกรัดรอบโลก

เชือกเส้นหนึ่งรัดแนบเส้นศูนย์สูตรของโลก (~40,000 กม.) คุณต่อเชือกเพิ่มอีกหนึ่งเมตร แล้วยกเชือกให้ลอยเหนือพื้นผิวสม่ำเสมอทั้งเส้น แมวลอดใต้ได้ไหม? และถ้าเปลี่ยนเป็นดิ่งส่วนหย่อนทั้งหมดขึ้นตั้งที่จุดเดียว ยอดจะสูงแค่ไหน?

ฟันธงก่อน — แมวลอดใต้หรือไม่ได้ — แล้วค่อยอ่านต่อ

เฉลย. ช่องว่างคือเส้นรอบวงส่วนเกินหารด้วย 2π : $1/(2\pi) \approx 15.9$ ซม. เท่ากันตลอดทั้งเส้น แมวลอดสบาย ที่เด็ดกว่านั้น: คำตอบไม่ขึ้นกับขนาดของดาวเคราะห์เลย — $C =$

$2\pi r$ ดังนั้น $\Delta r = \Delta C/2\pi$ รัศมีตัดกันหายไป; ลูกแก้วก็ให้ 15.9 ซม. เท่ากัน คำถามที่สองก็หายากคายพอกัน (ตรวจสอบเชิงตัวเลขแล้ว): ดิ่งตึงที่จุดเดียว ยอดอยู่สูงจากพื้นผิวราว 121 ม. ($\theta \approx (3s/2R)^{1/3}$) โดย s = ส่วนหย่อน 1 ม.; ความสูง $\approx R\theta^2/2$) สัญชาติญาณพลาดทั้งสองทิศทาง

ทำ — ให้พีชคณิตวิเศษได้สัญชาติญาณ. ความรู้สึกสเกลตามขนาดสมบูรณ์ แต่ความสัมพันธ์ $\Delta r = \Delta C/2\pi$ ไม่; เมื่อการหาอนุพันธ์สองบรรทัดขัดกับสัญชาติญาณ ให้การหาอนุพันธ์ชนะ

★★★ 23 · พาราไดออกซ์การหมุนของเหรียญ

เหรียญ B กลิ้งโดยไม่ลื่นไถลรอบเหรียญ A ที่เหมือนกันทุกประการและตรึงอยู่กับที่ ครอบหนึ่งรอบ B หมุนรอบแกนของตัวเองกี่รอบ? แล้วต่อ: วงกลมรัศมี r กลิ้งรอบวงกลมรัศมี $3r$ — หมุนกี่รอบ?

หยิบเหรียญสองเหรียญมาลอง ลองจริงๆ เกอะ

เฉลย. สองรอบ ไม่ใช่หนึ่ง — กลิ้งเหรียญรอบอีกเหรียญแล้วดูเอง: หัวเหรียญกลับมาตั้งตรงตั้งแต่ครึ่งทางแล้ว การหมุน = การกลิ้งไปตามเส้นทาง + ตัววงโคจรเอง: การกลิ้งสัมผัสให้ $C_A/C_B = 1$ และวงโคจรแถมอีก 1 สูตรทั่วไปกรณีกลิ้งด้านนอกคือ $R/r + 1$ กรณีรัศมี 3 จึงได้ 4 ไม่ใช่ 3 คำถามข้อนี้เป๊าะๆ ปรากฏในข้อสอบ SAT ของสหรัฐฯ เดือนพฤษภาคม 1982 โดยเฉลยกำหนดให้ "3" ถูก; นักเรียนสามคนพิสูจน์ว่าข้อสอบผิด ETS ยอมจำนน และคะแนนของทุกคนถูกปรับใหม่ ท้องฟ้าก็เล่นปรากฏการณ์เดียวกัน: วันดาราคติกับวันสุริยคติ — โลกหมุน 366.25 รอบในหนึ่งปีที่ยาว 365.25 วัน

ทำ — แยกสปินออกจากวงโคจร. เมื่อการเคลื่อนที่ประกอบกันหลายชั้น จงแยกส่วนมันออก — และเมื่อการนับถูกโต้แย้ง จงนับด้วยวิธีที่สองที่เป็นอิสระจากกัน แล้วเรียกร่องให้ทั้งสองตรงกัน

★★★★ 24 · แมงมุมกับแมลงวัน

ห้องยาว 30 ฟุต กว้าง 12 ฟุต สูง 12 ฟุต แมงมุมเกาะบนผนังสกัดขนาด 12×12 ด้านหนึ่ง ตรงกึ่งกลาง ต่ำจากเพดาน 1 ฟุต แมลงวันเกาะบนผนังสกัดฝั่งตรงข้าม ตรงกึ่งกลาง สูงจากพื้น 1 ฟุต เส้นทางเดินที่สั้นที่สุดของแมงมุมไปหาแมลงวัน โดยเดินไปตามพื้นผิวใดก็ได้ คือเท่าไร?

วาดรูปห้องเสียก่อน ค่อยไว้วางใจตัวเอง

เฉลย. เส้นทางที่เห็นชัดๆ — ขึ้นตรง เลาะเพดาน ลงตรง — ยาว $1 + 30 + 11 = 42$ ฟุต แต่ระยะทางบนกล่องคือเส้นตรงบนแผ่นคลี่ของมัน คลี่ชุดห้าหน้าที่ถูกต้อง — ผนังสกัด เพดาน ผนังข้าง พื้น ผนังสกัดฝั่งไกล — แล้วเส้นทางจะกลายเป็นด้านตรงข้ามมุมฉากของสามเหลี่ยมมุมฉาก 32×24 : $\sqrt{(1024 + 576)} = \sqrt{1600} = 40$ ฟุต (แผ่นคลี่แบบอื่นให้ 43.2 กับ 40.7; 40 ดีที่สุด ตรวจสอบด้วยเครื่องแล้ว) เส้นจีโอเดสิกที่แตะห้าจากหกหน้า ขณะที่เส้นทางที่ดูตรงที่สุด Dudeney, 1903 — Gardner ยกให้เป็นหนึ่งในปริศนาที่ดีที่สุดเท่าที่เคยมีผู้คิดค้น

ทำ — คลิปปริภูมิ. เปลี่ยนวิธีแทนปัญหาไปเรื่อยๆ จนคำตอบกลายเป็นเส้นตรง: สะท้อนโต๊ะบิลเลียด คลี่ทรงกระบอก ใส่ log

★★★★ 25 · โจทย์ของช่างตัดเสื้อ

ตัดสามเหลี่ยมด้านเท่าออกเป็นชิ้นให้น้อยที่สุด แล้วประกอบกลับเป็นสี่เหลี่ยมจัตุรัสสมบูรณ์

วางกรรไกรลงก่อน คิดก่อน

เฉลย. สี่ชิ้น — และที่น่าทึ่งคือ ทั้งสี่ชิ้นร้อยเป็นโซ่บานพับได้ แกว่งไปทางหนึ่งเป็นสามเหลี่ยม แกว่งอีกทางเป็นจัตุรัส ร่างวิธีสร้าง: แบ่งครึ่งสองด้านที่ D และ E; วาด F บนด้านที่สามให้ EF ยาวเท่าด้านของจัตุรัสเป้าหมาย ($\sqrt{\text{พื้นที่}}$); เส้นตั้งฉากเต็มรอยตัดทั้งสามให้ครบ — งานวงเวียนฉบับเต็มอยู่ใน Dudeney (1907) การมีอยู่ของคำตอบไม่เคยเป็นข้อกังขา: รูปหลายเหลี่ยมใดๆ ตัดประกอบเป็นรูปหลายเหลี่ยมพื้นที่เท่ากันใดๆ ได้เสมอ

(ทฤษฎีบท Wallace–Bolyai–Gerwien, 1807–1833); เกมที่แท้คือความน้อยที่สุดกับความงาม Dudeney ตั้งโจทย์เมื่อ 6 เมษายน 1902 ได้คำตอบสี่ชิ้นภายใน 4 พฤษภาคม และนำแบบจำลองบานพับทองเหลืองไปแสดงต่อ Royal Society ในปี 1905 เดือนธันวาคม 2024 Demaine, Kamata และ Uehara พิสูจน์ว่าการตัดสามชิ้นเป็นไปไม่ได้ (arXiv 2412.03865) — คำตอบอายุ 122 ปี ได้รับใบรับรองว่าดีที่สุดในแง่เสียที่

ทำ — จัดสรรพื้นที่เดิมเสียใหม่. การอนุรักษ์คำประกันว่ามีสะพานเชื่อมระหว่างรูปทรงพื้นที่เท่ากันเสมอ ฝีมือคือการหาสะพานที่เล็กที่สุด — และการพิสูจน์ว่าทำดีกว่านั้นไม่ได้ อาจยากกว่าการทำได้ตั้งหนึ่งศตวรรษ

★ 27 · ผลบวกห้องเรียนของ Gauss

บวกจำนวนเต็มตั้งแต่ 1 ถึง 100 — เร็วๆ ในหัว

ตำนานว่าคุณมีเวลาสิบวินาที

เฉลย. จับคู่หัวท้าย: $1+100, 2+99, \dots, 50+51$ — ทำสิบคู่ คู่ละ 101: **5050** โดยทั่วไปคือ $n(n+1)/2$ — ผลบวกที่นับเดินหน้าและถอยหลังพร้อมกัน คือ $(n+1)$ จำนวน n ชุด ว่าด้วยตำนาน: เกร็ดเด็กชาย Gauss (กระดานชนวนวางปิง "ligget se") โครงเรื่องมีจริงแต่รายละเอียดถูกแต่งเติม — แหล่งข้อมูลเก่าแก่ที่สุด (Sartorius, 1856) ไม่ระบุอนุกรมใดเจาะจง และรายละเอียด "1 ถึง 100" มาออกทีหลัง (Hayes, 2006) แต่ตัววิธีนั้นเก่าแก่โบราณอยู่ดี

ทำ — จับคู่ตัวสุดหัว. ยัดเยียดสมมาตรที่ข้อมูลไม่ได้ป่าวประกาศไว้ แล้วการคำนวณจะยุบตัวลงเอง

★★ 28 · แผลงวันระหว่างรถไฟ

รถไฟสองขบวนอยู่ห่างกัน 20 ไมล์ วิ่งเข้าหากันด้วยความเร็วขบวนละ 10 ไมล์/ชม. แผลงวันตัวหนึ่งออกจากขบวนแรกด้วยความเร็ว 15 ไมล์/ชม. บินไปถึงอีกขบวน หันกลับทันที บินกลับ วนอย่างนี้จนรถไฟพบกัน แผลงวันบินไปไกลเท่าไร?

ข่มใจไว้ อย่าเพิ่งบอกอนุกรม

เฉลย. รถไฟวิ่งเข้าหากันรวม 20 ไมล์/ชม. จึงพบกันใน 1 ชั่วโมงพอดี แผลงวันบินด้วยความเร็ว 15 ไมล์/ชม. ตลอดชั่วโมงนั้น: **15 ไมล์** ไม่ต้องใช้ออนุกรมเลย — แม้ผลบวกซิกแซกอนันต์จะลู่เข้าสู่คำตอบเดียวกัน ซึ่งเป็นมุขของเกร็ด von Neumann (ที่คงถูกขัดเงามาแล้ว) พอได้ฟังโจทย์ เขาตอบทันที "อ้อ คุณรู้ trik นี้เอง" — "trik อะไร? ผมบอกอนุกรม"

ทำ — รวมยอดทั้งก่อน ข้ามรายตอน. เมื่อกระบวนการยุ่งเหยิงเป็นตอนย่อยนับไม่ถ้วน แต่ปริมาณเชิงรวม — เวลา ระยะทาง พลังงาน — สะอาดเรียบ จงคำนวณตัวรวม

★★ 29 · ไวน์กับน้ำ

ไวน์แก้วหนึ่ง น้ำแก้วหนึ่ง ปริมาตรเท่ากัน ตักไวน์หนึ่งช้อนใส่แก้วน้ำ คนให้เข้ากัน (หรือไม่คนก็ได้ — ไม่สำคัญ) แล้วตักของผสมหนึ่งช้อนกลับคืน ในน้ำมีไวน์มากกว่า หรือในไวน์มีน้ำมากกว่า?

เลือกข้างเสียก่อนที่การโต้เถียงจะเริ่ม

เฉลย. เท่ากันเป๊ะ — ไม่ว่าจะคนหรือไม่ ช้อนใหญ่แค่ไหน หรือตักไปกลับกี่เที่ยว ข้อพิสูจน์จากสถานะปลายทาง: ทั้งสองแก้วจบที่ปริมาตรเดิม ดังนั้นไวน์ปริมาณเท่าใดที่หายไปจากแก้วไวน์ ต้องไปครองที่อยู่ในแก้วน้ำ และที่ว่างที่มันทิ้งไว้ก็ถูกเติมด้วยน้ำปริมาณเท่านั้นพอดี สมมาตรของการสลับปิดคติดก่อนจะต้องไล่ตามความเข้มข้นใดๆ เสียอีก — โครงกระดูกของการพิสูจน์ด้วยการระบายสีกระดานหมากรุก ในร่างของเหลว (ของประจำสำนัก Rouse Ball และ Gardner)

ทำ — การอนุรักษ์จับข้อโต้แย้ง. เมื่อการทำบัญชีอยู่แห่งหนึ่ง จงถามว่ายอดสุดท้ายต้องเป็นเท่าไร แล้วปล่อยให้การอนุรักษ์ทำเลขแทนทั้งหมด

★★★ 30 • ตู้ล็อกเกอร์พันใบ

ตู้ล็อกเกอร์หมายเลข 1–1000 ปิดหมดทุกใบ นักเรียนคนที่ k ($k = 1 \dots 1000$) สลับสถานะตู้ทุกใบที่เป็นพหุคูณของ k หลังนักเรียนทั้ง 1000 คนเดินผ่านครบ ตู้ใบไหนเปิดค้างอยู่?

ลองตู้ 1 ถึง 10 ด้วยมือก่อน

เฉลย (ยืนยันด้วยการจำลอง). ตู้ n ถูกสลับหนึ่งครั้งต่อหนึ่งตัวหารของ n จึงจบแบบเปิดก็ต่อเมื่อ n มีตัวหารเป็นจำนวนคี่ ตัวหารจับคู่กันเอง $d \leftrightarrow n/d$ — ยกเว้นเมื่อ $d = n/d$ นั่นคือเมื่อ n เป็นกำลังสองสมบูรณ์ ตู้ที่เปิดคือ 1, 4, 9, ..., 961: **กำลังสองสมบูรณ์ทั้ง 31 จำนวนที่ ≤ 1000** ข้อยกเว้นของการจับคู่นั้นแหละคือคำตอบ

ทำ — จับคู่ให้หมด แล้วสอบสวนข้อยกเว้น. สำหรับคำถามภาวะคู่คี่ (parity) จงหาการจับคู่สลับตัวเอง (involution) แล้วเพ่งดูจุดตรึงของมันให้หนักๆ

★★ 31 • หอคอยฮานอย

หอคอยสามแท่ง; งาน n ใบซ้อนเรียงตามขนาดอยู่บนหอคอยหนึ่ง จงย้ายหอคอยทั้งไปอีกหอคอยทีละใบ ห้ามวางงานใหญ่ทับงานเล็ก ต้องใช้อย่างน้อยกี่ตา? (เหล่าพระในตำนานเล่นที่ $n = 64$)

เล่นสามงานด้วยมือ สอนได้มากกว่านั่งจ้องเป็นชั่วโมง

เฉลย. $T(n) = 2T(n-1) + 1$: ย้ายงาน $n-1$ ใบไปพักไว้ ย้ายงานใหญ่ แล้วซ้อนกลับ — ดังนั้น $T(n) = 2^n - 1$ และการเวียนเกิด (recursion) นั่นเองคืออัลกอริทึม สำหรับ 64 งานของเหล่าพระ: $2^{64} - 1 = 18,446,744,073,709,551,615$ ตา — วินาทีละหนึ่งตาใช้เวลาราว 585 พันล้านปี (ตัวเลขเดียวกับข่าวสาส์นกระดานหมากรุก; การทวิคูณในร่างจริง) ส่วน "ตำนานพราหมณ์โบราณ" นั้นถูกกู้ขึ้นทั้งดุ้นโดยผู้แต่งปริศนาตัวจริง Édouard

Lucas ผู้วางขายมันในปี 1883 ได้นำมาเผยแพร่แบบแอนาแกรม "N. Claus de Siam" — การตลาดกับคณิตศาสตร์ในกล่องเดียวกัน

ทำ — เวียนเกิด: เชื่อตัวเองเวอร์ชันเล็กกว่า. แก้ปัญหาโดยสมมติว่าโจทย์ขนาดเล็กกว่าถูกแก้แล้ว แล้วให้โครงสร้างพาคุณไป — นี่คือการปริศนาที่คุ้มค่าที่สุดที่จะสัมผัสด้วยมือ ก่อนจะเขียนฟังก์ชันเรียกซ้ำใดๆ ในชีวิต

★★★★ 36 · ของสองใบ

ของผืนที่สองของ ของหนึ่งบรรจุเงินเป็นสองเท่าของอีกของ คุณหยิบมาหนึ่งของ — ข้างในมี X ข้อโต้แย้งว่า: "อีกของมี $2X$ หรือ $X/2$ ด้วยโอกาสเท่ากัน; ค่าคาดหวัง $(2X + X/2)/2 = 1.25X > X$ จึงควรสลับ แต่เหตุผลเดียวกันก็บอกให้สลับกลับ วนไปไม่รู้จบ" มันฟังตรงไหนกันแน่?

หาประโยชน์เป๊ะๆ ที่ข้อโต้แย้งเล่นตลก

เฉลย. จุดบกพร่องคือการสลับตัวแปร ในกึ่ง "อีกของ = $2X$ " สัญลักษณ์ X หมายถึงจำนวนที่น้อยกว่า; ในกึ่ง "อีกของ = $X/2$ " มันหมายถึงจำนวนที่มากกว่า อักษรตัวเดียวสองความหมาย — สูตรจึงเอาแอปเปิลบวกกับส้ม ทำให้ถูกต้อง: เรียกเงินก้อนนั้นว่า $(Y, 2Y)$; ไม่ว่าของไหนอยู่ในมือ การสลับได้ $+Y$ หรือ $-Y$ ด้วยความน่าจะเป็นเท่ากัน — ถ้าไรคาดหมาย 0 เวอร์ชันย่อใจแอบสมมติว่าเงินทุกจำนวนมีโอกาสเท่ากันหมด นั่นคือ uniform prior บนช่วงอนันต์ ซึ่งไม่ใช้การแจกแจงความน่าจะเป็น; ด้วย prior ที่ถูกกติกาใดๆ ถ้าไรคาดหมายแบบมีเงื่อนไขอินทิเกรตแล้วได้ศูนย์ (สำหรับจำนวนเงินที่สังเกตเห็นจริงค่าหนึ่ง prior ที่ถูกกติกาอาจเข้าข้างการสลับได้จริงๆ — นั่นคือการอัปเดตแบบเบย์ไม่ใช่พาราด็อกซ์) วงศ์ตระกูล: พาราด็อกซ์เนกไทของ Kraitichik (1943); ฉบับสมัยใหม่คือ Nalebuff (1989)

ทำ — ตอกหมุดตัวแปรสุ่ม. เขียนให้ชัดว่าอะไรคือสิ่งสุ่ม อะไรคือสิ่งที่สังเกตได้ และสัญลักษณ์แต่ละตัวหมายถึงอะไรในแต่ละกึ่ง — "พาราด็อกซ์" ความน่าจะเป็นส่วนใหญ่คืออาชญากรรมทางสัญลักษณ์

★★★★ 39 · Rubik's Cube กับคอมมิวเตเตอร์

ไม่ใช่ "แก้ลูกบิด" — แต่คือโจทย์การออกแบบที่อยู่ข้างใต้มัน จงหาลำดับการบิดที่เปลี่ยนแค่ชนิดเดียว — เช่นหมุนวนมุมสามชั้น — โดยไม่ต้องต่อความโกลาหล 4.3×10^{19} สถานะที่เหลือของลูกบาศก์ จะออกค้นหาเข็มแบบนั้นได้อย่างไรกัน?

ข้อนี้ถามหาวิธี ไม่ใช่คำตอบ

เฉลย. คอมมิวเตเตอร์: สำหรับลำดับ A และ B ให้ทำ $A B A^{-1} B^{-1}$ ถ้า A กับ B แตะชิ้นส่วนที่แทบไม่ทับซ้อนกัน เกือบทุกอย่างจะหักล้างกันเอง เหลือผลสุทธิเป็นการเปลี่ยนแปลงเฉพาะที่เล็กๆ — สามเหลี่ยมวนของมุมหรือขอบ หรือการบิดสักคู่ จากนั้น conjugation ($C X C^{-1}$) เป็นตัวเล็งเครื่องมือ: พาชิ้นที่คุณสนใจเข้าตำแหน่ง ใช้คอมมิวเตเตอร์ แล้วพากลับ วิธีเล่นของมนุษย์ทุกสำนักคือห้องสมุดของคอมมิวเตเตอร์ที่ถูก conjugate มาแล้ว; นั่นคือเหตุผลที่ "สูตร" สำหรับมือใหม่มีอยู่ได้เลย สเกลของวัตถุชิ้นนี้: 43,252,003,274,489,856,000 ตำแหน่ง — ทว่า God's number คือ 20 ตา (Rokicki–Kociemba–Davidson–Dethridge, 2010, ~35 CPU-years) ขณะที่วิธีของมนุษย์ใช้ 50–60 ช่องว่างระหว่างสิ่งที่มีอยู่จริงกับสิ่งที่หาเจอได้ ถืออยู่บนฝามือ

ทำ — สร้างเครื่องมือสลับที่ได้. ทำ ทำ ถอน ถอน: วิศวกรรมชุดปฏิบัติการที่การรบกวนกันของมันคือการเปลี่ยนแปลงที่คุณต้องการพอดี แล้ว conjugate เพื่อเล็งมัน — นี่คือนิเวศระบบใดๆ ที่ซับซ้อนเกินกว่าจะสร้างขึ้นใหม่ รวมทั้ง codebase และองค์กร

★★ 40 · รหัสเลื่อนของ Caesar กับการโจมตีด้วยความถี่

จงถอดรหัส: YMJ RFU NX YMJ YWJFXZWJ (รหัส Caesar — ทุกตัวอักษรถูกเลื่อนด้วยระยะเท่ากัน)

นับตัวอักษรก่อนจะนับกฎแจ

เฉลย. กฎแจมีแค่ 25 ดอก brute force จึงเสร็จในพริบตา — แต่การโจมตีที่ตรงตามคือเชิงสถิติ อักษรที่ดีที่สุดไนไซเฟอร์เท็กซ์คือ J (สี่ครั้ง); อักษรที่ดีที่สุดของภาษาอังกฤษคือ

E; สมมุติฐาน J = E หมายถึงเลื่อน 5 ในการเลื่อน -5: **THE MAP IS THE TREASURE**
 โอเคเดียวกันสเกลไปถึงรหัสแทนที่ทั่วไป ที่กุญแจ 26! ดอกฆ่า brute force ตายสนิท:
 จับคู่ลายนิ้วมือความถี่ตัวอักษร (E T A O I N ...) ตามด้วยคู่อักษรสามัญ (TH, HE) แล้ว
 รหัสก็รู้ตัวเปิดออก นั่นคือการเห็นทะเลของ al-Kindi ในศตวรรษที่ 9 — สถิติพิชิตความลับ
 หนึ่งพันปีก่อนคำว่า "สถิติ" จะถือกำเนิดเป็นคำ

ทำ — โจทย์ที่สถิติ. การเข้ารหัสซ่อนเนื้อหา ไม่ได้ซ่อนโครงสร้าง; สิ่งใดต้องรักษา
 หน้าที่ไว้ สิ่งนั้นต้องรักษาแพตเทิร์นไว้ด้วย จงหาแพตเทิร์นที่ซ่อนไม่ได้

★★★ 42 · คำไข่คริปติกสองข้อ

จงแก้ในฐานะคำไข่ครอสเวิร์ดแบบคริปติก: (a) "**Gegs (9,4)**" (b) "**HIJKLMNO (5)**"

อ่านคำไข่แต่ละข้อออกเสียง สองรอบ

เฉลย. (a) **SCRAMBLED EGGS** — คำไข่สาธิตคำตอบของตัวเอง: "gegs" ก็คือ eggs
 ที่ถูก scrambled ตามตัวอักษรจริงๆ; ตัวเลข (9,4) ยืนยัน (b) **WATER** — ตัวอักษรวิ่งจาก
 H ถึง O: "H-to-O" = H₂O ทั้งคู่คือการนิยามด้วยการแสดงให้ดู: คำไข่ไม่ได้บรรยายคำ
 ตอบ แต่ลงมือทำคำสั่งที่ผลิตคำตอบออกมา ใต้พื้นนั้นคือไวยากรณ์คริปติกมาตรฐาน: คำ
 ไข่ที่แพร่ทุกข้อบรรจุนิยามหนึ่งกับเส้นทางเล่นคำหนึ่ง — ข้อพิสูจน์อิสระสองทางของคำ
 ตอบเดียว สัญญาแบบ Ximenean (Ximenes, On the Art of the Crossword, 1966)

ทำ — ผิวหน้าซ่อนคำสัง. อ่านข้อความประหลาดสองรอบ — รอบหนึ่งในฐานะคำ
 บรรยาย อีกรอบในฐานะสูตรวิธีทำ — เพราะบางครั้งรูปแบบ ไม่ใช่เนื้อหา คือตัว
 สิ้นค้า

★★★ 43 • Nim

เบี้ยหลายกอง — เช่น 3, 5, 7 ผู้เล่นผลัดกันหยิบเบี้ยจำนวนบวกเท่าใดก็ได้จากกองเดียว ใครหยิบเบี้ยตัวสุดท้ายชนะ ใครชนะ และชนะอย่างไร? (อุปกรณ์: จากธง 21 อัน ผลัดกันหยิบครั้งละ 1–3; หยิบอันสุดท้ายชนะ — ใคร?)

เล่นเกมธง 21 อันกับตัวเองก่อน

เฉลย (ทฤษฎีบทตรวจด้วยเครื่องแล้วสำหรับทุกกองขนาด $\leq 5,5,5$). บทที่ 9 สกัด สมดุลนี้เป็นอาวุธประจำกล่องเครื่องมือ; ตรงนี้คือฉบับพกพา อุปกรณ์: พหุคูณของ 4 คือตำแหน่งแพ้ — ทิ้งไว้ 20, 16, 12, 8, 4 แล้วเล่นกระจุกตาม Nim เต็มรูป: เขียนขนาดกองเป็นเลขฐานสองแล้ว XOR กันทั้งหมด — ได้ **nim-sum** ตำแหน่ง (3,5,7):

$011 \oplus 101 \oplus 111 = 001 \neq 0$ ผู้เล่นคนแรกจึงชนะ; ตอบที่ชนะคือ $3 \rightarrow 2$ ทำให้ $010 \oplus 101 \oplus 111 = 0$ กลยุทธ์: เดินไปสู่ nim-sum 0 เสมอ จาก 0 ทุกตาเดินย่อมทำลายสมดุล — คู่แข่งจำต้องยืนตำแหน่งที่ไม่เป็นศูนย์คืบมา — และจากตำแหน่งไม่เป็นศูนย์ ตาเดินปรับสมดุลมีอยู่เสมอ Bouton พิสูจน์ครบถ้วนในปี 1901 นับเป็นเกมแรกในประวัติศาสตร์ที่ถูกแก้สมบูรณ์; จากนั้น Sprague กับ Grundy (1935–39) แสดงว่าเกมไม่เอนเอียง (impartial) ทุกเกมแท้จริงแล้วคือ Nim จำแลง — ปริมาณไม่แปรเปลี่ยนของปริศนาข้อเดียว กลืนกินทั้งประเภทวรรณกรรม

ทำ — รักษาสถานะสมดุล. ระบุคลาสปริมาณไม่แปรเปลี่ยนของตำแหน่งตาย แล้วพาเกมกลับไปที่นั้นทุกตา จนเสรีภาพของคุณแข่งไร้ความหมาย

★★ 45 • ทายสองในสามของค่าเฉลี่ย

ทุกคนในกลุ่มแอบเลือกตัวเลขใน $[0,100]$ คนที่ใกล้สองในสามของค่าเฉลี่ยทั้งกลุ่มที่สุดชนะ คุณจะเลือกเลขอะไร?

เลือกเลขของคุณก่อนจะได้พบทฤษฎี

เฉลย. ทฤษฎีล้วน: การทายเกิน 66.7 ถูกครอบงำ (dominated) เพราะค่าเฉลี่ยเกิน 100 ไม่ได้ ถ้าไม่มีใครเล่นกลยุทธ์ที่ถูกครอบงำ ค่าเฉลี่ยย่อมเกิน 66.7 ไม่ได้ การทายเกิน 44.4

จึงตายเป็นรอบถัดไป; การคัดออกวนซ้ำลงไปเรื่อยๆ จนถึง **0** — จุดสมดุล Nash หนึ่งเดียว ความเป็นจริง: ในการทดลองของ Nagel ปี 1995 และการประกวดทางหนังสือพิมพ์ที่มีผู้เล่นนับพัน เลขที่ชนะอยู่ราวๆ **20–25** — ประชากรจริงคือส่วนผสมของผู้เล่น level-0 (สุ่ม ~50), level-1 (ทาย 33), level-2 (ทาย 22) โดยมีน้อยคนที่ลงลึกกว่านั้น การเล่นที่ถูกต้องไม่ใช่จุดสมดุล; แต่คือหนึ่งขั้นลึกกว่าฝูงชน ไม่มากไปกว่านั้น คำบรรยายตลาดหุ้นแบบประกวดความงามของ Keynes (1936) ก็คือปริศนาข้อนี้ในชุดสุท

ทำ — ไล่จำลองใจคนอื่น (แล้วหยุด). จำลองว่าคนอื่นจะทำอะไร รวมถึงแบบจำลองที่เขามีต่อคุณ แต่ตรวจสอบเทียบความลึกของการเวียนซ้ำกับประชากรจริง ไม่ใช่ประชากรในอุดมคติ

★ 47 · พับกระดาษถึงดวงจันทร์

กระดาษแผ่นหนึ่งหนา 0.1 มม. พับครึ่ง 42 ครั้ง (ยกข้อความเป็นไปไม่ได้ทางกายภาพให้ก่อน) กองกระดาษจะหนาแค่ไหน — หนึ่งเมตร? ตึกหนึ่งหลัง? หรือมากกว่านั้น?

หนึ่งเมตร ตึกหนึ่งหลัง หรือมากกว่า — ฟันธงมา

เฉลย (คำนวณแล้ว). $2^{42} \times 0.1 \text{ มม.} \approx 4.4 \times 10^8 \text{ ม.}$ — **เลยดวงจันทร์ไปแล้ว** (ระยะเฉลี่ย $3.84 \times 10^8 \text{ ม.}$) แค่นี้สืบบพับก็เกิน 100 ม. แล้ว; สามสืบบพับไปถึงราว 107 กม. เช็กกับความจริงทางกายภาพ: สถิติโลกคือ **12 พับ** — Britney Gallivan, 2002 ด้วยกระดาษทิชชูม้วนยาว 1.2 กม. หลังจากหาอนุพัทธ์ฟังก์ชันความสูญเสีย $L = (\pi t/6)(2^n+4)(2^n-1)$ ด้วยตัวเองเสียก่อน ซึ่งอธิบายว่าทำไมแต่ละพับถึงกินกระดาษแพงขึ้นเป็นกำลังสอง ตำนานพื้นเมือง: กระดานหมากรุกข้าวสาลีทวีคูณ $2^{64} - 1 \approx 1.8 \times 10^{19}$ เมล็ด (เล่าเรื่องของ Sissa โดย Ibn Khallikan, 1256)

ทำ — เคารพเลขชี้กำลัง. สัญชาตญาณลากเส้นตรงต่อออกไป และการทวีคูณลงโทษมันภายในสามสืบก้าว: เมื่อกระบวนการใดคุณตัวเอง — หนี้ไวรัส คอมพิวเตอร์ ดอกเบี้ยทบต้น ความคลาดเคลื่อนสะสม — จงคำนวณ อยู่กะด้วยตาเด็ดขาด

ภาคผนวก ก — ดัชนีทำคิด

ปริศนาหาลับข้อกับเครื่องมือโอลิมปิกสิบหกชั้น บีบอัดเหลือทำคิดใช้งานจริงสามสิบสอง ทำ ทำละหนึ่งบรรทัด; บรรทัดคือเครื่องเตือนความจำ ไม่ใช่บทเรียน — บทเรียนอยู่ที่จุดอ้างอิง วิธีอ่านอ้างอิงคือ บท·ปริศนา: 5·6 หมายถึงบทที่ 5 ปริศนาชุดหลักข้อ 6; Ch 9 เดียวๆ ขึ้นไปยังเนื้อหาที่บทนั้นทำให้ดู ไม่ใช่ปริศนาหมายเลขใด; C·17 หมายถึงภาคผนวก ค — คลังสำรอง — ปริศนาชุดหลักข้อ 17 ดัชนีนี้คือหลักสูตรตัวจริงของหนังสือ ส่วนปริศนาคือระบบนำส่ง

มองให้ต่าง

- **สลับกรอบมอง; ตั้งคำถามกับเส้นเขต.** เมื่อข้อเท็จจริงพิลึกแต่ไม่ขัดแย้งกันเอง ข้อจำกัดที่ขวางทางมักเป็นอันที่คุณเติมเข้าไปเอง — 4·12, 4·13, C·17
- **หลายการยึดติดหน้าที่ของสิ่งของ.** ถามว่าวัตถุแต่ละชิ้นเป็นอะไร โดยไม่สนป้ายชื่อของมัน: กล่องก็เป็นหิ้งได้ — 4·14
- **เปลี่ยนปริภูมิ.** เพิ่มมิติเมื่อระนาบคือคุก (4·15); คลี่ปริภูมิจนคำตอบกลายเป็นเส้นตรง (C·24)
- **จำลองเรื่องเล่าเป็นโครงสร้าง.** ตั้งชื่อจุดยอดแล้วนิทานจะยุบเหลือแก่นที่รู้จัก; วัดความคืบหน้าในปริภูมิสถานะ ไม่ใช่ที่สัมผัส — 1·1, Ch 11

หาสิ่งที่ไม่มีวันเปลี่ยน

- **หาปริมาณไม่แปรเปลี่ยน.** ปริมาณอนุรักษ์หักล้างได้โดยไม่ต้องค้นหา — การระบายสีสำหรับการปูกระเบื้อง ภาวะคู่สำหรับระบบตาเดิน; หรือหาปริมาณวิ่งทางเดียวที่มีแต่ลด แล้วกระบวนการย่อมต้องหยุด — 6·20, 2·38, Ch 9
- **การอนุรักษ์จบข้อโต้แย้ง.** ยอดสถานะปลายทางกับตัวรวมทั้งก้อน ชนะการไล่ตามทีละตอน; เมื่อตำแหน่งโกหกได้ อัตราอาจไม่ — C·29, C·28, 4·16
- **รักษาสถานะสมดุล.** ระบุตำแหน่งตายแล้วพาเกมกลับไปหามันทุกตา; เสรีภาพของคู่แข่งจะไร้ความหมาย — Ch 9, C·43

ปฏิบัติกับความรู้เหมือนเป็นสสาร

- **ตั้งบผลลัพธ์ก่อนออกแบบการทดสอบ.** นับคำตอบที่เป็นไปได้ นับผลลัพธ์ของการทดสอบแต่ละครั้ง แล้วให้อัตราส่วนเป็นผู้กำหนดดีไซน์ — 7·8, Ch 11
- **สมมุติ แล้วหักล้างมัน — และใช้ประโยชน์จากความเท็จที่การันตี.** ตั้งสมมุติฐานที่ละกรณีแล้วให้ข้อขัดแย้งทำหน้าที่คัดออก; คำโกหกที่แน่นอนให้ข้อมูลเท่ากับความจริงที่แน่นอนเป๊ะ และจัดเส้นทางให้มันหักล้างตัวเองได้ — 5·2, 5·3, 5·4
- **ความรู้ที่ประกาศออกมาคือข้อมูล.** "ผมไม่รู้" ที่พูดออกมาดังๆ ช่วยกรองโลกที่เป็นไปได้ทิ้ง; คำพูดต่อสาธารณะผลิตความรู้ร่วม (common knowledge) ซึ่งเป็นมากกว่าการที่ทุกคนต่างรู้ — 5·6, 7·49, 7·10
- **ปรับเงื่อนไขตามกระบวนการ.** ข้อเท็จจริงหมายความว่าอะไร ขึ้นกับว่ามันเดินทางมาถึงคุณอย่างไร; วิธีสุ่มตัวอย่างเป็นตัวนิยามอัตราต่อรอง — 6·33, 6·34
- **ความรู้ทำลายตัวเองได้.** ข้อความว่าด้วยสิ่งที่คุณจะรู้ ไม่ใช่ข้อเท็จจริงธรรมดา; ป้อนมันเข้าสู่การให้เหตุผลของคุณแล้วอาจทำให้ตัวมันเองเป็นโมฆะ — 7·50

คำนวณให้ฉลาดกว่าเดิม

- **ปักหมุด แล้วแผ่ขยาย.** ปลุกข้อเท็จจริงสมบูรณ์ก่อน บีบข้อจำกัดที่แน่นที่สุดเป็นอันดับแรก และอย่าเดาเดาไรก็ได้ที่ยังมีตาบังคับเหลืออยู่ — 5·5, 6·41
- **คิดย้อนจากปลายทาง.** ต้นไม้ฝั่งเป้าหมายบางกว่า; คิดป้ายเกมปลายกระดานแล้วกลิ้งย้อนกลับมาสู่ปัจจุบัน — 7·44, Ch 10
- **เวียนเกิด แล้วแคชไว้.** เชื่อตัวเองเวอร์ชันเล็กกว่า; ศิลปะอยู่ที่การเลือกว่า "สถานะ" หนึ่งต้องจดจำอะไรบ้าง — C·31, Ch 10
- **นับอีกทาง.** ส่วนเต็มเต็ม (6·32), การจับคู่และข้อยกเว้นของมัน (C·30), การนับสองทาง, ค่าคาดหวัง — เซตเดียว บัญชีสองเล่ม และความตรงกันคือทฤษฎีบทของคุณ; ค่าเฉลี่ย v บังคับให้บางกรณีต้อง $\geq v$ — Ch 11
- **กรณีเล็กเสนอ; การพิสูจน์ชี้ขาด.** ทำตาราง ตั้งข้อคาดการณ์ แล้วพิสูจน์ — และเมื่อขึ้นอุปนัยแล้ว จงเสริมข้อความให้แข็งแรงจนมันแบกข้อเท็จจริงของตัวเองไหว — Ch 10, Ch 11

- **พิสูจน์ความตะกละด้วยการสลับขึ้น.** หรือใช้สับนาที่เดียวกันนั้นล่าตัวอย่างค้ำ; อัลกอริทึมตะกละที่ไม่ได้พิสูจน์คือการกระโดด ไม่ใช่แผน — Ch 10
- **ไบนารีเสิร์ชบนคำตอบ.** เมื่อความเป็นไปได้วิ่งทางเดียว (monotone) จงหาค่าดีที่สุดด้วยการตอบใช่/ไม่ใช่ เพียง log ครั้ง — Ch 10
- **สอบสวนพยานตัวสุดขั้ว.** สมาชิกที่ใหญ่สุด เล็กสุด ใกล้สุด หรือมาก่อนใคร มาถึงพร้อมข้อขัดแย้งบรรจุมารั้ว — Ch 9
- **ยึดเยียดหรือขโมยสมมาตร.** เล่นกระจกตามคู่แข่ง แล้วทุกคำถามในอนาคตจะถูกตอบไว้วางหน้า; หรือแสดงว่าตาเดินที่เกินมาไม่มีวันทำร้ายใคร — Ch 9
- **ประดิษฐ์กล่องรังนกพิราบ.** ตัวทฤษฎีบทยาวบรรทัดเดียว; ฝีมือทั้งหมดอยู่ที่การผลิตหมวดหมู่ — Ch 9
- **ประกาศ WLOG แล้วออกแบบการแยกกรณี.** ทารสมมาตรทิ้งเสียก่อน; เลือกวิธีแบ่งให้ทุกกิ่งตกลงบนทำปดเกม — Ch 11

ยืม แบ่ง ผูกชะตา

- **ปรับโครงสร้างบิล.** ยืมหนึ่งหน่วยมาแล้วคืน (6·26); ให้ของแพงแชร์กัน (5·7) ส่วนต่อขยายชั่วคราวเผยโครงสร้างถาวร
- **วิศวกรรมชะตากรรม.** ผูกชะตากรรมให้ทุกคนรอดหรือตายบนเหตุการณ์เดียว (7·37); เมื่อสถานะร่วมมีชนิดเดียว จงออกแบบโปรโตคอล ไม่ใช่สินัย (7·9)
- **สร้างเครื่องมือสลับที่ได้.** ทำ ทำ ถอน ถอน — ตัวปฏิบัติการเล็กๆ ที่เปลี่ยนน้อยและรักษาส่วนที่เหลือ คือวิธีแก้ไขระบบใดๆ ที่ซับซ้อนเกินกว่าจะสร้างขึ้นใหม่ — C·39

ตรวจสอบก่อนไว้ใจ

- **ตรวจข้อสมมุติที่มองไม่เห็น.** เขียนรายการค่าตั้งต้นของคุณลงกระดาษ; โจมตีอันเก่าแก่ที่สุดก่อน — 4·11
- **อย่าเชื่อผิวหน้า.** ตรวจสอบแผนภาพ ให้พีชคณิตปะทะสัญชาตญาณ โจมตีที่สถิติ; สิ่งใดต้องรักษาหน้าที่ไว้ สิ่งนั้นย่อมรั้วแพตเทิร์นออกมา — 6·22, C·21, C·40
- **ตอกหมุดตัวแปรสุ่ม; แบ่งขั้นก่อนเปรียบเทียบ.** พาราไดกซ์ส่วนใหญ่คืออาชญากรรมทางสัญลักษณ์; การกลับทิศส่วนใหญ่แอบซ่อนอยู่ในส่วนผสมของกรณี — C·36, 6·35

สเกล

- **แยกส่วน ประมาณ คุณ — แล้วเคารพเลขชี้กำลัง.** ทำงานเป็นเลขยกกำลังสิบ บอกเป็นช่วงไม่ใช่จุด และอย่ากะกระบวนการที่คุณด้วยตาเด็ดขาด — 6.46, C.47

ใจคนอื่น

- **จำลองผู้สร้าง.** ลงลึกกว่าฝูงชนหนึ่งขั้นแล้วหยุด (C.45); สิ่งประดิษฐ์ที่สร้างด้วยเจตนา ถอดรหัสได้เร็วที่สุดด้วยการจำลองเจตนา นั้น (Ch 8) — และบางครั้งผิวหน้านั้นแหละคือคำสั่ง (C.42)
- **หาจุดตรึง.** ทำให้คำบรรยายเป็นส่วนหนึ่งของสิ่งที่ถูกบรรยาย แล้วเรียกร้องความคงเส้นคงวา: $x = f(x)$ — 6.48

ภาคผนวก ข — สุสานมายาคติแห่งการคิด

ทุกสาขาวิชามีห้องถ้วยรางวัล; หนังสือเล่มนี้เก็บสุสานไว้ด้วย ผู้พำนักทั้งหกรายด้านล่าง ล้วนงดงาม พังขึ้น และเป็นที่รัก หลายรายก่อร่างขึ้นจากการทดลองจริง ทั้งหมดตายแล้ว เราฝังพวกมันด้วยความเคารพและเกียรติยศเพิ่มขึ้น เพราะแต่ละรายสอนบางสิ่งแก่ วงการด้วยการตายของตัวเอง — และเพราะหนังสือที่ใช้สืบทอดการสอนความช่างสงสัย ย่อมติดหนี้ผู้อ่านซึ่งบัญชีรายชื่อผู้ถูกสังหาร มาเยี่ยมได้; วางดอกไม้ได้; แต่อย่าปลูกให้ ฟืน

๐ เกมฝึกสมองเชิงพาณิชย์

คำกล่าวอ้าง. เล่นปริศนาในแอปวันละสิบนาที ยกระดับความจำ สมาธิ และสติปัญญา แบบเดียวกับที่ยกดัมเบลสร้างกล้ามเนื้อ **ทำไมจึงแพร่หลาย.** วิทยาศาสตร์ความยืดหยุ่น ของสมอง (neuroplasticity) ของจริง ประชากรสูงวัยที่ยินดีจ่ายซื้อประกันความเสื่อม และใบเสร็จที่ให้ความรู้สึกเชื่อถือตรง: คะแนนในเกมที่ฝึกนั้นได้ขึ้นจริงๆ **หลักฐานว่า อย่างไร.** Owen et al. (Nature, 2010): ผู้ใหญ่ 11,430 คน หกสัปดาห์ — งานที่ฝึกดีขึ้น ชัดเจน แต่การถ่ายโอนแม้ไปยังงานญาติสนิทก็ประมาณศูนย์ ๕ รีวิวหลักฐานของทั้ง อุตสาหกรรมโดย Simons et al. ปี 2016: เหมือนกัน FTC สั่งปรับผู้ผลิต Lumosity 2 ล้านดอลลาร์ในปี 2016 ฐานโฆษณาหลอกลวง การฝึกนั้นเฉพาะเจาะจง: เกมฝึกเกม **คำ ตัดสิน.** ๐ ตายแล้ว คำจารึกบนหลุม: เขาเก่งเกมนั้นขึ้นมากจริงๆ (วินัยเรียกชื่อ-จับแต่ง ตัวใหม่ของบทที่ 15 มีอยู่ ก็เพราะศพรายนี้เป็นของจริง)

๐ สไตล์การเรียนรู้

คำกล่าวอ้าง. แต่ละคนเป็นผู้เรียนสายภาพ สายเสียง หรือสายเคลื่อนไหว และการสอนที่ จับคู่ตรงกับสไตล์จะให้ผลการเรียนรู้ที่ดีกว่า **ทำไมจึงแพร่หลาย.** ความชอบมีอยู่จริงและ ง่ายดาย; โอเคนี่ประจบความเป็นปัจเจก; อุตสาหกรรมแบบประเมิน-และ-เวิร์กช็อปออก งามขึ้นรอบตัวครูใจดีที่อยากสอนให้เข้ากับแต่ละคน **หลักฐานว่าอย่างไร.** Pashler, McDaniel, Rohrer และ Bjork (2008) ตรวจสอบชี้ทั้งวงการ: คำกล่าวอ้างนี้ต้องการ ปฏิสัมพันธ์แบบไขว้ — ผู้เรียนสายภาพเรียนได้มากกว่าจากการสอนด้วยภาพ สายเสียง กลับกัน — แต่แทบไม่มีงานวิจัยใดรันดีไซน์ที่ถูกต้อง; งานที่รันแล้วไม่พบผลของการจับคู่

๕๕ ความชอบมีจริง; การสอนตามความชอบไม่ได้ช่วย เนื้อหาต่างหากที่กำหนดสื่อที่ดีที่สุด: เรขาคณิตต้องการรูปภาพ สำหรับทุกคน **คำตัดสิน.** ๐ ตายแล้ว จงสอนตามสไตล์ของเนื้อหา ไม่ใช่สไตล์ของผู้เรียน

๐ คนสมองซีกซ้าย คนสมองซีกขวา

คำกล่าวอ้าง. คนเจ้าเหตุผลรันบนสมองซีกซ้าย คนเจ้าความคิดสร้างสรรค์รันบนซีกขวา **ทำไมจึงแพร่หลาย.** งานวิจัยสมองแยกซีกของ Sperry เป็นของจริง ตระการตา และคว่ำรางวัลโนเบล (1981); แบบทดสอบบุคลิกภาพกับเวิร์กช็อปองค์กรรีดข้อเท็จจริงจริงเรื่องสมองที่ถูกผ่าแยก จนแบนลงเป็นข้อเท็จจริงเท็จเรื่องนักบัญชี **หลักฐานว่าอย่างไร.** ฟังก์ชันแบ่งข้างจริง; คนไม่ Nielsen et al. (2013) วิเคราะห์สแกนสมองขณะพักของ 1,011 ราย ไม่พบสักคนที่มีซีกใดครอบงำทั่วทั้งสมอง ๕๕ สมองครบส่วนทุกก่อนรันทั้งสองซีกกับแทบทุกเรื่อง **คำตัดสิน.** ๐ ตายแล้ว คุณเป็นคนสมองครบทั้งก้อน; เช่นเดียวกับทุกคนที่คุณเคยเถียงด้วย

๐ เราใช้สมองแค่ 10%

คำกล่าวอ้าง. เก้าในสิบของสมองคุณจอดว่างอยู่ รอวันปลดล็อก **ทำไมจึงแพร่หลาย.** มักสืบสาวไปถึงการบิดคำของ William James ผู้เขียนไว้ (1907) ว่าเราใช้ทรัพยากรทางจิตเพียงเสี้ยวเดียว — คำกล่าวเชิงปลุกใจด้วยความพยายาม; ตัวเลข "10%" อันเกลี้ยกล่อมถูกแปะเข้ามาทีหลัง และไม่มีใครที่สืบตัวได้เคยวัดมันจริง มันอยู่รอดเพราะมันพิมพ์ใบอนุญาตแจก: 90% ที่หายไปเป็นของคุณ ในราคาค่าสัมมนา **หลักฐานว่าอย่างไร.** การถ่ายภาพสมองแสดงว่าเกือบทั้งสมองแอคทีฟตลอดวันธรรมดาๆ วันหนึ่ง; ไม่มีบริเวณใดถูกทำลายไปได้ฟรีๆ ๕๕; และอวัยวะที่หนัก 2% ของมวลกายแต่เบิกบพลังงานราว 20% ย่อมเป็นพนักงานนั่งว่างค่าตัวแพงที่สุดของวิวัฒนาการ ๕๕ **คำตัดสิน.** ๐ ตายแล้ว คุณใช้มันทั้งหมดนั่นแหละ บางวันมันไม่ให้ความรู้สึกละอย่างนั้น ซึ่งเป็นปัญหาคนละเรื่อง

๐ ปรากฏการณ์ Mozart

คำกล่าวอ้าง. ฟัง Mozart แล้ว IQ สูงขึ้น — จงเปิดโซนาตาให้ทารกฟัง แล้วเด็กจะโตขึ้นฉลาดกว่าเดิม **ทำไมจึงแพร่หลาย.** Rauscher, Shaw และ Ky (Nature, 1993) พบว่านักศึกษา 36 คนทำแบบทดสอบเชิงมิติสัมพันธ์งานหนึ่งดีขึ้นชั่วคราว หลังฟังโซนาตาสิบนาที สื่อบอกว่า "36" "ชั่วคราว" "งานเชิงมิติสัมพันธ์งานเดียว" และ "นักศึกษา" ทั้งหมด

แล้วภายในปี 1998 ผู้ว่าการรัฐจอร์เจียก็จัดบชีดีเพลงคลาสสิกให้ทารกแรกเกิดทุกคนในรัฐ สังเกตหวังโซให้ตี: ไม่มีทารกโผล่อยู่ตรงไหนของงานวิจัยเลย **หลักฐานว่าอย่างไร**. เมตา-วิเคราะห์ (Chabris, 1999; Pietschnig et al., 2010) พบผลวิจัยจนถึงศูนย์ ซึ่งอธิบายได้ดีที่สุดด้วยความตื่นตัวและอารมณ์ — อะไรก็ตามที่คุณเพิลิตเพิลินได้ผลพอกัน ๕ พุดได้ว่ามี "ปรากฏการณ์มิลค์เชค" ที่ศักดิ์สิทธิ์เท่ากันทุกประการ **คำตัดสิน**. ๐ ตายแล้ว Mozart คือคีตกวี ไม่ใช่อาหารเสริม ความเพิลิตเพิลินนั้นคือคำตอบแทนในตัวมันเองอยู่แล้ว

๐ กฎ 10,000 ชั่วโมง

คำกล่าวอ้าง. ฝึกหนึ่งหมื่นชั่วโมง ทำให้ใครก็ได้กลายเป็นผู้เชี่ยวชาญในเรื่องอะไรก็ได้ **ทำไมจึงแพร่หลาย**. Ericsson, Krampe และ Tesch-Römer (1993) พบว่านักไวโอลินระดับหัวแถวสะสมการฝึกอย่างจงใจ (deliberate practice) มาแล้วโดยเฉลี่ยราวหนึ่งหมื่นชั่วโมงเมื่ออายุยี่สิบ; Gladwell (2008) ปิดค่าเฉลี่ยให้กลายเป็นกฎ พร้อมตัวเลขที่ลงโปสเตอร์ได้พอดีพอดี **หลักฐานว่าอย่างไร**. เมตา-วิเคราะห์ปี 2014 ของ Macnamara, Hambrick และ Oswald: การฝึกอย่างจงใจอธิบายความแปรปรวนของผลงานได้ราว 12% โดยรวม — ~26% ในเกม ~21% ในดนตรี ต่ำกว่า 1% ในวิชาชีพ ๕ ค่าเฉลี่ยของการกระจายมโหฬารเอาไว้; ชั่วโมงคือค่าผ่านประตู ไม่ใช่ใบเสร็จรับของ; และ Ericsson เองก็ปฏิเสธ "กฎ" นี้ (ค่าเฉลี่ยไม่ใช่เกณฑ์ขั้นต่ำ และการฝึกอย่างจงใจ — ที่ชอบความสามารถ พร้อมพีดแบ็ก — ไม่ใช่สิ่งเดียวกับจำนวนชั่วโมง) งานวิจัยที่มายาคติบิดเบือนไปนั้นยังมีชีวิตแข็งแรงดี; มันคือบทที่ 15 **คำตัดสิน**. ๐ ตายแล้ว ตัวเลขนั้นคือค่าเฉลี่ย เวทมนตร์อยู่ที่วงจรพีดแบ็ก

หลุมศพหกหลุม แพตเทิร์นเดียว: ทุกมายาคติหยิบผลลัพธ์จริงอันแคบ แล้วเอาไปขายแบบกว้าง ทักษะการชันสูตรนี้ถ่ายโอนได้ในตัวมันเอง — มันคือท่าของ 6-35 ในชุดกาวนห้องแล็บ: เช็คว่าตัวรวมซ่อนอะไรไว้ ถามว่า n เท่าไร งานอะไร ผลอยู่ได้นานแค่ไหน และใครกำลังขายของ คำกล่าวอ้างเสนงามรายถัดไปกำลังเดินทางมาแล้ว

อ่านต่อจากตรงนี้

ประตู่เจ็ดบาน ติดป้ายตามตรง

- **Martin Gardner, คอลัมน์ "Mathematical Games" ทั้งหมด (1956–1981)** ตัวขยายสัญญาณที่ยิ่งใหญ่ที่สุดในประวัติศาสตร์ของแนวนี; เริ่มที่ The Colossal Book of Mathematics (2001) แล้วเตรียมงบเพื่อสุดสัปดาห์หลายชุดที่จะหายวับไป
- **George Pólya, How to Solve It (1945)** เอกสารก่อตั้งของฮิวริสติกส์ในฐานะหลักสูตร; ภาค III ของหนังสือเล่มนี้คือหนึ่งในทายาทมากมายของมัน
- **Raymond Smullyan, What Is the Name of This Book? (1978)** บันไดอัศวิน-กับ-จอมลวงที่พาผู้อ่านใจเย็น ทีละปริศนาโรงเตี๊ยม ขึ้นไปจนถึง Gödel
- **H. E. Dudeney, The Canterbury Puzzles (1907) และ Amusements in Mathematics (1917); Sam Loyd, Cyclopedia of Puzzles (1914)** ยุคทองจากต้นตอ — Dudeney เพื่อความงามสง่า Loyd เพื่อลีลาการแสดง ทั้งคู่อ่านได้อรรถรสที่สุดเมื่อสวมแว่นตรวจที่มา (provenance) ที่บทที่ 2 แจกไว้ให้
- **Art of Problem Solving — artofproblemsolving.com** ตำรา ฟอรัม และเรือนเพาะชำของนักเหรียญโอลิมปิกยุคใหม่ส่วนมาก; บันไดใช้งานจริงจากคณิตศาสตร์โรงเรียนสู่ดินแดนบทที่ 8–11
- **Project Euler — projecteuler.net** โจทย์นับร้อยข้อที่วิศวกรรมมาให้เลขคณิตกำลังดิบล้มเหลว มีแต่การปึ้ง (insight) เท่านั้นที่รันจบภายในหนึ่งนาที; คณิตศาสตร์กับการเขียนโปรแกรมในโรงยิมเดียวกัน
- **The ARC Prize — arcprize.org** ตารางกริดของ Chollet สร้างมาให้ง่ายสำหรับมนุษย์และยากสำหรับเครื่องจักร ลองทำเองสักยี่สิบข้อ แล้วสัมผัสด้วยมือตัวเองว่าคุณนั่งอยู่ฝั่งไหนของบัญชีในภาค IV (ตารางอันดับที่นั่นลงวันที่ ณ กรกฎาคม 2026)

อ่านต่อจากตรงนี้

บันทึกท้ายเล่ม

หนังสือเล่มนี้ถูกสร้างขึ้นด้วยวิธีเดียวกับที่มันสอนคุณให้ทำงาน

ปริศนาชุดหลักห้าสิบข้อถูกรวบรวมจากแหล่งข้อมูลชั้นต้น และการแก้เครดิตให้ถูกคนถูกประกาศไว้ในเนื้อความ ไม่ใช่ชุดกึ่งในเชิงอรรถ: เกม 15 Puzzle เป็นของ Noyes Chapman ไม่ใช่ Sam Loyd; ปริศนาม้าลายเป็นของ Life International ไม่ใช่ Einstein; เกร็ดของ Gauss ถูกเล่าในฐานะตำนานอย่างที่มีนัยเป็น เฉลยสิบหกข้อของชุดหลักถูกตรวจยืนยันด้วยเครื่อง ผ่านการแจกแจงจนหมดจดหรือการจำลอง ในเดือนกรกฎาคม 2026 — breadth-first search สำหรับโจทย์ข้ามแม่น้ำ ครบทั้งยี่สิบสี่กรณีของลูกบอลสิบสองลูก ผลบวกฮาร์โมนิกของนักโทษร้อยคน ความเป็นหนึ่งเดียวของ 6210001000 — เพราะเฉลยยังไม่นับว่า "ตรวจแล้ว" จนกว่าสิ่งที่ไม่อาจยากให้มันเป็นจริง จะเห็นพ้องด้วย เฉลยละเอียดของภาค III ถูกหาค่าใหม่ตั้งแต่ต้นจนจบระหว่างการจัดเรียง และที่ใดมีวิธีหาคำตอบอิสระสองทาง ทั้งคู่ถูกรันและถูกบังคับให้ตรงกัน คำกล่าวอ้างทุกข้อว่าด้วยปัญญาประดิษฐ์แบบวันทีของมันเอง — กรกฎาคม 2026 — โดยเจตนา: ประโยคเหล่านั้นจะแก้ตัวลง และวันที่คือเส้นแบ่งระหว่างภาพถ่าย ณ ขณะหนึ่ง กับการเสแสร้ง

หนังสือเล่มนี้เรียบเรียงโดยทีม AICE กรกฎาคม 2026 — มนุษย์กับเครื่องจักรในการแบ่งงานแบบเดียวกับที่หนังสือเองแนะนำ: เครื่องจักรแจกแจง ตรวจสอบ และไม่มีวันเหนื่อย; มนุษย์เลือกปริศนา เลือกลำดับ และเลือกกว่าอะไรคือสิ่งสำคัญ

กล่องหนึ่งใบเปิดค้างมาตั้งแต่หน้าแรก

ที่ประตูของบทที่ 1 สฟิงซ์ถามว่า: สิ่งใดเดินสี่ขาในยามเช้า สองขาในยามเที่ยง และสามขาในยามเย็น? สิบหกบทกับสามภาคผนวกผ่านไป ยังไร้คำตอบ — วินัยกันสปอยล์ที่แม้แต่เราเองยังแทบรักษาไว้ไม่ไหว

คำตอบคือมนุษย์ คลานสี่ขาในยามเช้าของชีวิต ก้าวเดินสองขาในยามเที่ยงของมัน และพึงไม้เท้าในยามเย็น — สิ่งมีชีวิตหนึ่งเดียว สามร่าง วันเดียวที่ยืนแทนทั้งชีวิต Oedipus แก้มันด้วยท่าที่บัดนี้เป็นของคุณแล้ว: ปฏิเสธไปตามตัวอักษร ผูกความหมายของคำเสียใหม่ เปลี่ยนสเกลของเวลา สฟิงซ์ทำลายตัวเอง อย่างที่ผู้เฝ้าประตูยอมทำ เมื่อประตูถูกผ่านไปอย่างแท้จริง

และจงสังเกตว่าคำตอบนั้นคืออะไร ไม่ใช่เทพ ไม่ใช่ซอสูร — แต่คือสัตว์ที่เปลี่ยนวิธีเคลื่อนไหวของตัวเอง และรู้ว่าเปลี่ยน ปรีศนาคำทายเก่าแก่ที่สุดเท่าที่ถูกจดจารไว้ว่าด้วยตัวผู้แก้มันเอง: สิ่งมีชีวิตที่ทั้งชีวิตคือการแทนความหมายใหม่ครั้งแล้วครั้งเล่า สี่พันปีให้หลัง ทายาทคนล่าสุดของนางนั่งอยู่ในเบนซ์มาร์กแห่งหนึ่ง ชูตารางกริดสีให้เครื่องจักรดู ยังคงคัดแยกจิตใจอยู่ตรงหน้าประตู มันคืองานเดียวของนาง และเป็นงานที่มันคงมาแต่ไหนแต่ไร

กล่องปิดแล้ว; หนังสือจบแล้ว; ส่วนประตู — เช่นเคย — เปิดอยู่

เชิญเดินผ่านไปเถิด