

The First Digit — Benford's Law, What It Catches and What It Cannot

หลักแรก — กฎของเบนฟอร์ด สิ่งที่ยึดจับได้ และสิ่งที่
ยึดจับไม่ได้

Benford's law is a real regularity with a precise cause and a narrow domain. Its value is not that it detects fraud but that it makes a claim checkable; its danger is that a statistic strong enough to convince is strong enough to convict the innocent.

AICE

Contents

- 1 The Worn Pages — How a Library Book Gave It Away
- 2 The Mantissa Circle — Why the Law Exists At All
- 3 Units and Bases — Settling the Argument
- 4 When the Law Does Not Apply
- 5 Hill's Theorem — Why Mixtures Converge
- 6 The Auditor's Tool — Nigrini and Forensic Accounting
- 7 National Accounts — Transparency Between States
- 8 The Election Error — Where the Law Was Abused
- 9 Science and Clinical Data — Integrity Screening
- 10 Second Digits and Beyond — The Fuller Law
- 11 What It Cannot Catch
- 12 The Procedure — Running the Test Yourself

The Worn Pages — How a Library Book Gave It Away

The Astronomer and the Logarithm Tables

นักดาราศาสตร์และตารางลอการิทึม

In 1881, the American astronomer and mathematician Simon Newcomb made a peculiar discovery while working with logarithm tables in a library. He observed that the pages at the beginning of the book were significantly more worn and tattered than the pages located toward the end. This physical deterioration revealed a mathematical truth: the ten digits do not occur with equal frequency as the leading digits of numbers. Newcomb noted that the digit 1 appears as the first significant digit far more often than the digit 9 in natural numbers. He published this observation in the American Journal of Mathematics, suggesting that the mantissae of logarithms are equally probable in their distribution. This foundational insight remained largely unremarked and unexplained for 57 years, existing in the literature as an evident but unexamined phenomenon.

เลขนำของตัวเลขไม่ได้แจกแจงเท่ากัน และหลักฐานชิ้นแรกคือกระดาษที่สีใน ปี 1881 ซีมอน นิวคอมบ์ นักดาราศาสตร์และนักคณิตศาสตร์ชาวอเมริกัน เปิดตารางลอการิทึมในห้องสมุดแล้วพบว่าหน้าต้นเล่มสีและขาดวินกว่าหน้าท้ายเล่มอย่างเห็นได้ชัด รอยสีก็นับบอกความจริงทางคณิตศาสตร์ข้อหนึ่ง เลขโดดทั้งสิบตัวไม่ได้เป็นเลขนำของตัวเลขด้วยความถี่เท่ากัน ในตัวเลขตามธรรมชาติ เลข 1 เป็นเลขสำคัญหลักแรกบ่อยกว่าเลข 9 มาก นิวคอมบ์ตีพิมพ์ข้อสังเกตนี้ใน American Journal of Mathematics และเสนอว่าแมนทิสซาของลอการิทึมแจกแจงด้วยความน่าจะเป็นเท่ากัน แล้วเรื่องก็เงียบไป 57 ปี ข้อสังเกตนี้อยู่ในงานเขียนในฐานะปรากฏการณ์ที่เห็นได้ชัด แต่ไม่มีใครอธิบายและไม่มีใครตรวจสอบ

The Physicist and the Law of Anomalous Numbers

นักฟิสิกส์และกฎของตัวเลขผิดปกติ

In 1938, the physicist Frank Benford, working at the GE Research Laboratory in Schenectady NY, provided the empirical proof that solidified this observation. Benford compiled 20,229 first-digit observations across 20 disparate datasets, including river areas, population counts, physical constants, and even street addresses. His measurements demonstrated that the frequency of digits follows a logarithmic law, starting at 30.6% for the digit 1 and declining to 4.7% for the digit 9. These observed frequencies closely matched the predicted logarithmic values, which range from 30.1% for the digit 1 down to 4.6% for the digit 9. This distribution is deeply surprising to everyone who encounters it, as human intuition falsely suggests that each digit should appear with equal frequency. Benford's comprehensive study transformed an obscure observation into a recognized law, detailing the specific frequencies for all digits from 1 through 9.

หลักฐานเชิงประจักษ์มาในปี 1938 จากแฟรงค์ เบนฟอร์ด นักฟิสิกส์ที่ GE Research Laboratory ในเมืองสเกเน็คเทอดี้ รัฐนิวยอร์ก และมันทำให้ข้อสังเกตของนิวคอมบ์หนักแน่นขึ้น เบนฟอร์ดนับเลขนำ 20,229 ค่า จากชุดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวกับ 20 ชุด ทั้งพื้นที่ลุ่มน้ำ จำนวนประชากร ค่าคงที่ทางฟิสิกส์ และแม้แต่บ้านเลขที่ตามท้องถนน ผลที่วัดได้เดินตามกฎลอการิทึม เริ่มที่ 30.6% สำหรับเลข 1 แล้วลดลงจนเหลือ 4.7% สำหรับเลข 9 ค่าที่กฎทำนายไว้ไล่จาก 30.1% สำหรับเลข 1 ลงไปถึง 4.6% สำหรับเลข 9 ตัวเลขที่วัดได้ตามค่าทำนายไว้อย่างใกล้ชิด ทุกคนที่พบการแจกแจงนี้ครั้งแรกจะแปลกใจ เพราะสัญชาตญาณของมนุษย์บอกผิดๆ ว่าตัวเลขแต่ละตัวควรปรากฏด้วยความถี่เท่ากัน งานของเบนฟอร์ดครอบคลุมพอที่จะเปลี่ยนข้อสังเกตที่ไม่มีใครสนใจให้เป็นกฎที่ได้รับการยอมรับ พร้อมความถี่จำเพาะของตัวเลขทุกตัวตั้งแต่ 1 ถึง 9

The Question of Theoretical Derivation

ประเด็นเรื่องการอนุพัทธ์เชิงทฤษฎี

Benford's empirical compilation of these 20,229 observations is entirely uncontested and remains a standard in the field of statistical analysis. However, his own original theoretical derivation of the law, which relied on a geometric-series argument, was later superseded by more rigorous work. Specifically, the theoretical foundations he proposed were replaced by the mathematical proofs developed by Pinkham in 1961 and Hill in 1995.

ตัวเลข 20,229 ค่าที่เบนฟอร์ดรวบรวมไว้ไม่มีใครโต้แย้ง และยังคงเป็นมาตรฐานของสาขาการวิเคราะห์ทางสถิติ สิ่งที่ไม่รอดคือคำอธิบายของเขาเอง เบนฟอร์ดอนุพัทธ์กฎนี้จากการให้เหตุผลด้วยอนุกรมเรขาคณิต และงานที่เข้มงวดกว่าเข้ามาแทนที่ในเวลาต่อมา รากฐานทางทฤษฎีที่เขาเสนอถูกแทนที่ด้วยบทพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ของพิงค์แฮมในปี 1961 และฮิลล์ในปี 1995

Example: Expecting digits to appear with equal frequency is like assuming every shelf in a library holds an identical number of books regardless of its location.

ตัวอย่าง: คาดว่าตัวเลขทุกตัวจะปรากฏด้วยความถี่เท่ากัน ก็เหมือนทึกทักว่าชั้นหนังสือทุกชั้นในห้องสมุดมีหนังสือจำนวนเท่ากัน ไม่ว่าชั้นนั้นจะอยู่ตรงไหน

Verdict. The leading digits of numbers in natural datasets are not evenly distributed, with the digit 1 appearing significantly more frequently than the digit 9.

คำตัดสิน. เลขนำของตัวเลขในชุดข้อมูลตามธรรมชาติแจกแจงไม่สม่ำเสมอ เลข 1 ปรากฏบ่อยกว่าเลข 9 อย่างมีนัยสำคัญ

Overtured if: A comprehensive replication of the 20,229 observations fails to show the logarithmic decline from 30.1% to 4.6% across diverse datasets.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: ทำซ้ำข้อมูลทั้ง 20,229 ค่าอย่างครอบคลุมในชุดข้อมูลที่หลากหลาย แล้วไม่พบการลดลงเชิงลอการิทึมจาก 30.1% ไปสู่ 4.6%

Sources. 1881 · Simon Newcomb, "Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers" — [PDF](<https://pdodds.w3.uvm.edu/files/papers/others/1881/newcomb1881a.pdf>) · **1938** · Frank Benford, "The Law of Anomalous Numbers" — [PDF](<https://isidore.co/misc/Physics%20papers%20and%20books/Zotero/storage/ZEBWDL73/Benford%20-%201938%20-%20The%20Law%20of%20Anomalous%20Numbers.pdf>)

แหล่งอ้างอิง. 1881 · Simon Newcomb, "Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers" — [PDF](<https://pdodds.w3.uvm.edu/files/papers/others/1881/newcomb1881a.pdf>) · **1938** · Frank Benford, "The Law of Anomalous Numbers" — [PDF](<https://isidore.co/misc/Physics%20papers%20and%20books/Zotero/storage/ZEBWDL73/Benford%20-%201938%20-%20The%20Law%20of%20Anomalous%20Numbers.pdf>)

The Mantissa Circle — Why the Law Exists At All

The Anatomy of a Number

กายวิภาคของตัวเลข

Any positive number can be expressed as a product of an integer power of ten and a fractional part known as the mantissa. The mantissa is the value that remains once you strip away the decimal shifts, essentially mapping every number onto a circular scale between zero and one. R.M. Fewster, in her 2009 work, explains that the first digit of a number is determined entirely by where this mantissa falls on the logarithmic cycle. If a data set is spread uniformly across this circular mantissa space, the distribution of leading digits will inevitably conform to the specific logarithmic frequencies of Benford's Law. Theodore P. Hill reinforced this principle in 1995 by demonstrating that base-invariance is the unique mathematical signature of this specific logarithmic distribution across different number systems. This mechanism explains why world population data, which spans nine orders of magnitude as measured in 2009, tends to conform so naturally to these predicted probabilities.

หลักแรกของตัวเลขถูกกำหนดด้วยแมนทิสซาเพียงอย่างเดียว จำนวนบวกใดๆ เขียนได้เป็นผลคูณของสิบกกำลังจำนวนเต็มกับส่วนเศษที่เรียกว่าแมนทิสซา แมนทิสซาคือค่าที่เหลือเมื่อตัดการเลื่อนตำแหน่งทศนิยมออกไป ผลก็คือตัวเลขทุกตัวถูกจับคู่ลงบนมาตราส่วนวงกลมระหว่างศูนย์ถึงหนึ่ง R.M. Fewster อธิบายในงานปี 2009 ของเธอว่า หลักแรกขึ้นอยู่กับตำแหน่งที่แมนทิสซาทกบนรอบลอการิทึมนี้ทั้งหมด หากชุดข้อมูลกระจายสม่ำเสมอทั่วพื้นที่แมนทิสซาแบบวงกลมนี้ การแจกแจงของเลขนำจะตรงกับความถี่ลอการิทึมเฉพาะของกฎของ Benford โดยเสียไม่ได้ Theodore P. Hill ยืนยันหลักการนี้ในปี 1995 โดยแสดงว่าความไม่แปรผันตามฐานคือเอกลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เพียงหนึ่งเดียวของการแจกแจงลอการิทึมนี้ ไม่ว่าจะใช้ระบบตัวเลขฐานใด กลไกนี้คือเหตุผลที่ข้อมูลประชากรโลก ซึ่งครอบคลุมอันดับความใหญ่ถึงเก้าอันดับเมื่อวัดในปี 2009 สอดคล้องกับความน่าจะเป็นที่กฎทำนายไว้อย่างเป็นธรรมชาติ

Scale, Growth, and Convergence

มาตราส่วน การเติบโต และการลู่เข้า

The distribution holds its power because it is the only one that remains invariant when a set of numbers is multiplied by a constant factor. Roger S. Pinkham established in 1961 that if a set follows Benford's Law, multiplying every value by a nonzero constant preserves that same characteristic distribution of digits. Theodore P. Hill later provided a statistical derivation in 1995, showing how samples drawn from diverse distributions converge toward this law when they are pooled together. While this provides a rigorous foundation, Fewster noted in 2009 that this convergence offers little diagnostic insight into why specific real-world datasets land precisely where they do. Measurements of US Powerball jackpots from 2009, which span only 1.5 orders of magnitude, demonstrate that a narrow range often leads to a measurable deviation from the law. In that case, the data showed 36 percent of values starting with one, far exceeding the expected 30 percent, while only 2.6 percent started with nine.

การแจกแจงนี้ทรงพลังเพราะเป็นแบบเดียวที่ไม่แปรผันเมื่อคูณตัวเลขทั้งชุดด้วยค่าคงที่ Roger S. Pinkham พิสูจน์ในปี 1961 ว่าถ้าชุดข้อมูลเป็นไปตามกฎของ Benford การคูณทุกค่าด้วยค่าคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์จะรักษาการแจกแจงของตัวเลขแบบเดิมไว้ ต่อมาในปี 1995 Theodore P. Hill ให้การอนุพัทธ์ทางสถิติ แสดงว่ากลุ่มตัวอย่างที่ดึงจากการแจกแจงหลากหลายแบบจะลู่เข้าหากฎนี้เมื่อนำมารวมกัน รากฐานนี้รัดกุม แต่ Fewster ตั้งข้อสังเกตในปี 2009 ว่าการลู่เข้าแบบนี้แทบไม่ช่วยวินิจฉัยว่าเหตุใดชุดข้อมูลในโลกจริงบางชุดจึงมีค่าออกมาตรงจุดนั้นพอดี ช่วงที่แคบมักทำให้เบี่ยงเบนจากกฎอย่างวัดได้ การวัดเงินรางวัลแจ็กพอตของ US Powerball จากปี 2009 ครอบคลุมอันดับความใหญ่เพียง 1.5 อันดับ และแสดงเรื่องนี้ชัด ในกรณีนั้น 36 เปอร์เซ็นต์ของค่าเริ่มต้นด้วยเลขหนึ่ง เกินกว่า 30 เปอร์เซ็นต์ที่คาดไว้มาก ส่วนค่าที่เริ่มต้นด้วยเลขเก้ามีเพียง 2.6 เปอร์เซ็นต์

The Heuristic Dispute

ข้อพิพาทเชิงฮิวริสติก

A popular contemporary claim asserts that data must span several orders of magnitude to follow the law, but Theodore P. Hill identifies this as a mega-error. Hill proves that a distribution spanning only a single order of magnitude can be perfectly Benford, while wide ranges do not guarantee conformity if the shape is wrong. This represents an in-house dispute among specialists, contrasting the popular-science shorthand of the Election Integrity Partnership against Hill's formal mathematical rebuttal published in 2020.

Theodore P. Hill เรียกข้ออ้างยอดนิยมข้อหนึ่งในปัจจุบันว่าความผิดพลาดครั้งใหญ่ ข้ออ้างนั้นบอกว่าข้อมูลต้องครอบคลุมอันดับความใหญ่หลายระดับจึงจะเป็นไปตามกฎนี้ Hill พิสูจน์ว่าการแจกแจงที่ครอบคลุมอันดับความใหญ่เพียงระดับเดียวก็เป็นไปตามกฎของ Benford ได้อย่างสมบูรณ์ ส่วนช่วงที่กว้างก็ไม่รับประกันความสอดคล้องถ้ารูปร่างของการแจกแจงนั้นผิด นี่คือข้อพิพาทภายในกลุ่มผู้เชี่ยวชาญเอง ฝั่งหนึ่งคือวิธีลัดแบบวิทยาศาสตร์ยอดนิยมของ Election Integrity Partnership อีกฝั่งคือการโต้แย้งทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นทางการของ Hill ที่ตีพิมพ์ในปี 2020

Example: A clock face represents the mantissa, where the position of the hand dictates the leading digit regardless of how many times the minute hand has circled.

ตัวอย่าง: หน้าปัดนาฬิกาคือแมนทิสซา ตำแหน่งของเข็มนาฬิกากำหนดเลขนำ ไม่ว่าเข็มนาฬิกาจะหมุนวนไปแล้วกี่รอบก็ตาม

Verdict. The law describes the shape of the underlying distribution, not the raw span of the data across multiple orders of magnitude.

คำตัดสิน. กฎนี้อธิบายรูปร่างของการแจกแจงเบื้องต้น ไม่ใช่ช่วงกว้างที่ข้อมูลดิบกินไปหลายอันดับความใหญ่

Overtaken if: A formal mathematical proof demonstrates that a log-uniform distribution on a single order of magnitude fails to produce the Benford digit frequencies.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: มีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นทางการแสดงว่าการแจกแจงแบบลอการิทึมสม่ำเสมอบนอันดับความใหญ่เดียวสร้างความถี่ของเลขตามกฎของ Benford ไม่ได้

Sources. 2009 · R.M. Fewster, "A Simple Explanation of Benford's Law" — [PDF](https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/cmu/21-499/handouts/benford/Fewster_SimpleExplanationBenfordLaw.pdf) · **1995** · Theodore P. Hill, "Base-Invariance Implies Benford's Law" — [Cal Poly DigitalCommons](https://digitalcommons.calpoly.edu/rgp_rsr/30/)

แหล่งอ้างอิง. 2009 · R.M. Fewster, "A Simple Explanation of Benford's Law" — [PDF](https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/cmu/21-499/handouts/benford/Fewster_SimpleExplanationBenfordLaw.pdf) · **1995** · Theodore P. Hill, "Base-Invariance Implies Benford's Law" — [Cal Poly DigitalCommons](https://digitalcommons.calpoly.edu/rgp_rsr/30/)

Units and Bases — Settling the Argument

The claim that is too strong

ข้ออ้างที่หนักแน่นเกินไป

A common statement, repeated by textbooks and by chatbots, is that river lengths obey Benford's law in any unit and any base. The objection is immediate: converting kilometres to feet multiplies every number by 3280.84, so the digits must move. The objection is correct, and the popular statement is false as usually phrased. What Roger Pinkham proved in 1961 runs the other way: if a digit law is to be independent of the unit, it must be Benford's, and no other law has that property. That is a conditional about laws, not a promise about datasets, and the difference is the whole confusion. Benford's law is unit-independent; a pile of numbers is not, unless it already happens to be Benford.

คำกล่าวที่ตำราเรียนและแชทบอทพูดซ้ำกัน — ว่ายาวแม่น้ำเป็นไปตามกฎของ Benford ในทุกหน่วยและทุกฐาน — เป็นเท็จในแบบที่มักพูดกัน ข้อคัดค้านมาทันทีและถูกต้อง: แปลงกิโลเมตรเป็นฟุตคือคูณทุกตัวเลขด้วย 3280.84 ตัวเลขจึงต้องขยับ สิ่งที่ Roger Pinkham พิสูจน์ในปี 1961 ซ้ำไปอีกทาง: ถ้ากฎของตัวเลขจะเป็นอิสระจากหน่วยวัด กฎนั้นต้องเป็นกฎของ Benford และไม่มีกฎอื่นใดมีคุณสมบัตินี้ นั่นคือเงื่อนไขว่าด้วยตัวกฎ ไม่ใช่คำมั่นว่าด้วยชุดข้อมูล และความต่างข้อนี้คือความสับสนทั้งก้อน กฎของ Benford เป็นอิสระจากหน่วยวัด กองตัวเลขไม่เป็น เว้นแต่มันบังเอิญเป็นไปตามกฎของ Benford อยู่แล้ว

What the experiment shows

สิ่งที่การทดลองแสดงให้เห็น

Running the test on real data settles it, and the book ships the script. The first 300 Fibonacci numbers span 62.35 orders of magnitude and conform closely to Benford under every multiplier tested and in base 8 and base 16, with a mean absolute deviation of 0.0023 to 0.0040. That is scale invariance: the unit changes and the answer does not. The 132 longest rivers span only 0.84 orders of magnitude, because such a list has a floor built into it, and they fail Benford in every unit tested. Their digits also move: 65.2 per cent lead with 1 in kilometres, 37.1 per cent with 3 in feet, 31.1 per cent with 5 in furlongs. Mean adult height across 195 countries spans 0.06 orders of magnitude and leads with 1 for 100 per cent of countries in metres and with 5 for 99.0 per cent in feet.

รันการทดสอบกับข้อมูลจริงแล้วเรื่องจบ และหนังสือเล่มนี้แนบสคริปต์มาด้วย จำนวน Fibonacci 300 ลำดับแรกกินช่วง 62.35 อันดับความใหญ่ และเข้ากับกฎของ Benford อย่างใกล้ชิดภายใต้ตัวคูณทุกตัวที่ทดสอบ รวมถึงในฐาน 8 และฐาน 16 โดยค่าเบี่ยงเบนสัมบูรณ์เฉลี่ย (MAD) อยู่ระหว่าง 0.0023 ถึง 0.0040 นั่นคือความไม่แปรผันตามมาตราส่วน: หน่วยเปลี่ยน คำตอบไม่เปลี่ยน แม่น้ำที่ยาวที่สุด 132 สายกินช่วงเพียง 0.84 อันดับความใหญ่ เพราะรายการแบบนี้มีพื้นล่างฝังอยู่ในตัว และแม่น้ำเหล่านี้ตกกฎของ Benford ในทุกหน่วยที่ทดสอบ ตัวเลขของมันขยับด้วย: 65.2 เปอร์เซ็นต์นำด้วยเลข 1 ในหน่วยกิโลเมตร 37.1 เปอร์เซ็นต์นำด้วยเลข 3 ในหน่วยฟุต 31.1 เปอร์เซ็นต์นำด้วยเลข 5 ในหน่วยเฟิร์ลลอง ความสูงเฉลี่ยของผู้ใหญ่ใน 195 ประเทศกินช่วง 0.06 อันดับความใหญ่ นำด้วยเลข 1 ใน 100 เปอร์เซ็นต์ของประเทศเมื่อวัดเป็นเมตร และนำด้วยเลข 5 ใน 99.0 เปอร์เซ็นต์เมื่อวัดเป็นฟุต

Why units rotate the circle

เหตุใดหน่วยวัดจึงหมุนวงกลม

Keep only the fractional part of a number's base-ten logarithm, and every number becomes a point on a circle of circumference one. Multiplying everything by a constant adds that constant's logarithm to every point, rotating the circle and changing nothing else. Benford's law is exactly the statement that those points are spread uniformly, and a uniform distribution is the only one a rotation leaves unchanged. So the question is never which unit, but how uniformly the data is spread on the log scale: Fibonacci sits 0.0106 from uniform, the rivers 0.3764, the heights 0.7357, and the digit tables follow those three numbers exactly.

เก็บไว้แค่ส่วนเศษของลอการิทึมฐานสิบของตัวเลข ตัวเลขทุกตัวก็กลายเป็นจุดบนวงกลมที่มีเส้นรอบวงเท่ากับหนึ่ง คุณทุกอย่างด้วยค่าคงที่ตัวหนึ่ง เท่ากับบวกลอการิทึมของค่าคงที่นั้นเข้าไปในทุกจุด วงกลมหมุนไป และไม่มีอะไรอื่นเปลี่ยน กฎของ Benford คือคำกล่าวตรงตัวว่าจุดเหล่านั้นกระจายสม่ำเสมอ และการแจกแจงแบบสม่ำเสมอเป็นแบบเดียวที่การหมุนทิ้งไว้เหมือนเดิม คำถามจึงไม่เคยเป็นว่าหน่วยไหน แต่เป็นว่าข้อมูลกระจายบนสเกลลอการิทึมสม่ำเสมอแค่ไหน: Fibonacci ห่างจากสม่ำเสมอ 0.0106 แม่น้ำ 0.3764 ความสูง 0.7357 และตารางตัวเลขตามเลขสามตัวนั้นทุกประการ

Example: Rotating a plain ring leaves it identical; rotating a ring set with one diamond moves the diamond into view — only the featureless ring survives the turn.

ตัวอย่าง: หมุนแหวนเกลี้ยง มันยังเหมือนเดิม หมุนแหวนที่ฝังเพชรหนึ่งเม็ด เพชรเลื่อนเข้ามาให้เห็น มีแต่แหวนที่ไม่มีจุดเด่นเท่านั้นที่รอดจากการหมุน

Verdict. Benford's law is unit-invariant; datasets are not, and a dataset is Benford in every unit only if it was already Benford in one.

คำตัดสิน. กฎของ Benford ไม่แปรผันตามหน่วยวัด ชุดข้อมูลแปรผัน และชุดข้อมูลจะเป็นไปตามกฎของ Benford ในทุกหน่วยวัดก็ต่อเมื่อมันเป็นไปตามกฎของ Benford อยู่แล้วในหน่วยวัดหนึ่ง

Overtuned if: a dataset far from uniform on the log-mantissa circle keeps the same leading-digit frequencies under a change of unit, breaking Pinkham's uniqueness result.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: ชุดข้อมูลที่ห่างไกลจากความสม่ำเสมอบนวงกลมแมนทิสซาลอการิทึมยังคงความถี่ของเลขนำไว้เท่าเดิมเมื่อเปลี่ยนหน่วยวัด และนั่นจะทำลายผลลัพธ์ความเป็นหนึ่งเดียวของ Pinkham

Sources. 1961 · Roger S. Pinkham, "On the Distribution of First Significant Digits," *Annals of Mathematical Statistics* 32(4) — [JSTOR](<https://www.jstor.org/stable/2237922>) · **1995** · Theodore P. Hill, "Base-Invariance Implies Benford's Law," *Proceedings of the AMS* 123(3) — [AMS](<https://www.ams.org/journals/proc/1995-123-03/S0002-9939-1995-1233974-8/>) · **2026** · AICE, "The units experiment" — source/experiment.py

แหล่งอ้างอิง. 1961 · Roger S. Pinkham, "On the Distribution of First Significant Digits," *Annals of Mathematical Statistics* 32(4) — [JSTOR](<https://www.jstor.org/stable/2237922>) · **1995** · Theodore P. Hill, "Base-Invariance Implies Benford's Law," *Proceedings of the AMS* 123(3) — [AMS](<https://www.ams.org/journals/proc/1995-123-03/S0002-9939-1995-1233974-8/>) · **2026** · AICE, "The units experiment" — source/experiment.py

When the Law Does Not Apply

The limits of scale invariance

ขีดจำกัดของความไม่แปรผันตามมาตราส่วน

Benford's law is frequently misunderstood as a universal guarantee that applies to any numerical dataset provided the numbers span a sufficient range of magnitudes. Theodore P. Hill (2020) argues in his arXiv paper that this common shorthand regarding orders of magnitude is actually a widespread error in statistical analysis. To test this, the 2026 AICE units experiment examined 132 of the world's longest rivers, which span only 0.84 orders of magnitude in their measurements. The resulting mantissa KS distance of 0.3764 in this 2026 study demonstrates that narrow-range data often fails to conform to the expected Benford distribution. Conformity is not an inherent property of data scale but rather a conditional outcome that requires specific underlying mathematical distributions to function as predicted. The assumption that a wide span of numbers automatically ensures Benford-like behavior is a heuristic that frequently misleads those who rely on it for fraud detection.

ช่วงตัวเลขที่กว้างไม่ใช่หลักประกัน กฎของ Benford มักถูกเข้าใจผิดว่าใช้ได้กับชุดข้อมูลตัวเลขใดก็ตาม ขอเพียงตัวเลขครอบคลุมอันดับความใหญ่ได้กว้างพอ Theodore P. Hill (2020) ได้แย้งในเอกสาร arXiv ของเขาว่า คำกล่าวโดยย่อเรื่องอันดับความใหญ่นี้แท้จริงคือข้อผิดพลาดที่แพร่หลายในการวิเคราะห์ทางสถิติ การทดลองหน่วยวัด AICE ปี 2026 ทดสอบเรื่องนี้ด้วยแม่น้ำที่ยาวที่สุดในโลก 132 สาย ค่าที่วัดได้ครอบคลุมอันดับความใหญ่เพียง 0.84 ระยะห่าง KS ของแมนทิสซาดอกมาที่ 0.3764 ในการศึกษาปี 2026 นี้ ข้อมูลช่วงแคบจึงมักไม่เข้ากับการแจกแจงแบบ Benford ที่คาดไว้ ความสอดคล้องไม่ใช่คุณสมบัติที่ติดมากับมาตราส่วนของข้อมูล มันเป็นผลที่มีเงื่อนไข ต้องมีการแจกแจงทางคณิตศาสตร์เฉพาะอยู่เบื้องหลังจึงจะเป็นไปตามที่คาด ข้อสันนิษฐานว่าช่วงตัวเลขกว้างรับประกันพฤติกรรมแบบ Benford โดยอัตโนมัติ เป็นอิทธิพลที่ทำให้คนที่ใช้มันตรวจจับการฉ้อโกงเข้าใจผิดอยู่บ่อยครั้ง

The problem of assigned numbers

ปัญหาของตัวเลขที่ถูกกำหนดขึ้น

Assigned numbers such as phone numbers, ZIP codes, or specific identification numbers are inherently structured by human design rather than natural processes or growth. Because these identifiers are typically formatted to satisfy bureaucratic requirements, they almost never exhibit the logarithmic distribution characteristic of Benford's law. The 2026 AICE units experiment further illustrated this by measuring the mean height of individuals across 195 countries, finding a span of only 0.06 orders of magnitude. This specific dataset produced a mantissa KS distance of 0.7357, showing how imposed minimums or narrow physical constraints lead to total nonconformity in the distribution. When the leading digits shift drastically based on the chosen unit—such as 100% leading-1s in metres versus 99.0% leading-5s in feet—the failure of the law is absolute. Human-assigned data remains fundamentally incompatible with the law because the digits are chosen for convenience or classification rather than emerging from a multiplicative process.

ตัวเลขที่ถูกกำหนดขึ้นไม่เดินตามกฎนี้ หมายเลขโทรศัพท์ รหัสไปรษณีย์ หรือหมายเลขระบุตัวตนเฉพาะ มีโครงสร้างมาจากการออกแบบของมนุษย์ ไม่ใช่จากกระบวนการทางธรรมชาติหรือการเติบโต ตัวระบุเหล่านี้ถูกจัดรูปแบบให้ตรงตามข้อกำหนดทางราชการ จึงแทบไม่เคยแสดงการแจกแจงแบบลอการิทึมที่เป็นลักษณะเฉพาะของกฎของ Benford การทดลองหน่วยวัด AICE ปี 2026 แสดงเรื่องนี้เพิ่มอีกชั้นด้วยการวัดความสูงเฉลี่ยของบุคคลใน 195 ประเทศ ช่วงอันดับความใหญ่ที่พบมีเพียง 0.06 ชุดข้อมูลนี้ให้ระยะห่าง KS ของแมนทิสซาที่ 0.7357 ค่าขั้นต่ำที่ถูกกำหนด หรือข้อจำกัดทางกายภาพที่แคบ พากการแจกแจงไปสู่ความไม่สอดคล้องโดยสิ้นเชิง เลขนำยังเปลี่ยนไปมากตามหน่วยที่เลือก เลขนำ 1 ทั้งหมด 100% ในหน่วยเมตร เทียบกับเลขนำ 5 ถึง 99.0% ในหน่วยฟุต เมื่อเป็นเช่นนั้น กฎนี้ล้มเหลวโดยสมบูรณ์ ข้อมูลที่มนุษย์กำหนดขึ้นเข้ากับกฎนี้ไม่ได้โดยพื้นฐาน เพราะตัวเลขถูกเลือกเพื่อความสะดวกหรือเพื่อจำแนกประเภท ไม่ได้เกิดจากกระบวนการคูณ

The dispute over the rule

ข้อพิพาทเกี่ยวกับกฎนี้

The popular rule requiring several orders of magnitude for compliance is contested by Theodore P. Hill (2020) who labels it a mega-error. This in-house dispute targets the shorthand currently employed by organizations such as Wolfram Research, the Election Integrity Partnership, and Reuters Fact Check. The reliance on this flawed heuristic risks misapplying the law in contexts where it lacks the necessary mathematical foundation to provide valid evidence.

Theodore P. Hill (2020) ตรานักกฎหมายอดนียมข้อนี้ว่าเป็นข้อผิดพลาดมหันต์ กฎที่ว่าคือข้อกำหนดที่ต้องมีอันดับความใหญ่หลายระดับจึงจะเกิดความสอดคล้อง ข้อพิพาทภายในนี้มุ่งเป้าไปที่คำย่อที่องค์กรอย่าง Wolfram Research, Election Integrity Partnership และ Reuters Fact Check ใช้อยู่ในปัจจุบัน ฟังฮิวริสติกที่บกพร่องนี้ ก็เสี่ยงที่จะนำกฎไปใช้ผิดบริบท ในกรณีที่กฎขาดรากฐานทางคณิตศาสตร์ที่จำเป็นต่อการให้หลักฐานที่ถูกต้อง

Example: Expecting a list of ZIP codes to obey Benford's law is like expecting a list of names to obey the laws of planetary motion.

ตัวอย่าง: คาดหวังให้รายการรหัสไปรษณีย์ปฏิบัติตามกฎของ Benford ก็เท่ากับคาดหวังให้รายการชื่อปฏิบัติตามกฎการเคลื่อนที่ของดาวเคราะห์

Verdict. The law does not apply to assigned, bounded, or narrow-range data.

คำตัดสิน. กฎนี้ใช้ไม่ได้กับข้อมูลที่ถูกกำหนดขึ้น ข้อมูลที่มีขอบเขตจำกัด หรือข้อมูลช่วงแคบ

Overtuned if: A rigorous mathematical proof demonstrates that narrow-range datasets with high KS distances still reliably predict digit frequencies in a meaningful way.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: มีการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่เข้มงวดแสดงให้เห็นว่า ชุดข้อมูลช่วงแคบที่มีระยะห่าง KS สูงยังทำนายความถี่ของตัวเลขได้อย่างน่าเชื่อถือ และมีความหมายจริง

Sources. 2020 · Theodore P. Hill, "A Widespread Error in the Use of Benford's Law to Detect Election and Other Fraud" — [arXiv:2011.13015] (<https://arxiv.org/pdf/2011.13015>) · **1995** · Theodore P. Hill, "A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law," Statistical Science 10(4) — [Project Euclid](<https://projecteuclid.org/journals/statistical-science/volume-10/issue-4/A-Statistical-Derivation-of-the-Significant-Digit-Law/10.1214/ss/1177009869.full>) · **2026** · AICE, "The units experiment" — source/experiment.py

แหล่งอ้างอิง. 2020 · Theodore P. Hill, "A Widespread Error in the Use of Benford's Law to Detect Election and Other Fraud" — [arXiv:2011.13015] (<https://arxiv.org/pdf/2011.13015>) · **1995** · Theodore P. Hill, "A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law," Statistical Science 10(4) — [Project Euclid](<https://projecteuclid.org/journals/statistical-science/volume-10/issue-4/A-Statistical-Derivation-of-the-Significant-Digit-Law/10.1214/ss/1177009869.full>) · **2026** · AICE, "The units experiment" — source/experiment.py

Hill's Theorem — Why Mixtures Converge

The Mathematical Foundation of Mixtures

รากฐานทางคณิตศาสตร์ของการผสมผสาน

Theodore P. Hill provided a rigorous statistical explanation for why disparate datasets often conform to the logarithmic distribution of significant digits. His derivation, published in the 1995 volume of Statistical Science, Vol. 10, No. 4, pp. 354–363, demonstrates that Benford's law is a natural consequence of data aggregation. When probability distributions are picked at random and a random sample is drawn from each, the combined significant digits converge to Benford's law regardless of shape. This theorem explains why Benford's own 20 disparate datasets, which lacked a singular origin, tended toward a consistent and predictable logarithmic pattern of occurrence. The work of Theodore P. Hill (1995) suggests that the law acts as a mathematical attractor for mixtures of independent processes that might otherwise appear unrelated. By treating the underlying distributions as random variables, the theorem shows that the law is not a coincidence but a byproduct of mixing many distributions.

กฎของ Benford เกิดขึ้นเองเมื่อรวมข้อมูลเข้าด้วยกัน นี่คือการสรุปที่ Theodore P. Hill พิสูจน์ไว้อย่างรัดกุมทางสถิติ เพื่อตอบว่าเหตุใดชุดข้อมูลที่ต่างกันจึงมักลงเอยที่การแจกแจงแบบลอการิทึมของเลขนำ บทพิสูจน์นี้ตีพิมพ์ในวารสาร Statistical Science ปี 1995 เล่มที่ 10 ฉบับที่ 4 หน้า 354–363 สารคือ ถ้าสุ่มเลือกการแจกแจงความน่าจะเป็นมาหลายตัว แล้วสุ่มตัวอย่างจากแต่ละตัว เลขนำของตัวอย่างที่รวมกันจะลู่เข้าหากฎของ Benford ไม่ว่าการแจกแจงเดิมจะมีรูปร่างอย่างไร ทฤษฎีบทนี้จึงตอบได้ว่าเหตุใดชุดข้อมูล 20 ชุดของ Benford ที่ไม่มีที่มาาร่วมกันเลย จึงเอนเข้าหารูปแบบลอการิทึมเดียวกันที่สม่ำเสมอและคาดการณ์ได้ ผลงานของ Theodore P. Hill (1995) ชี้ว่ากฎนี้ทำหน้าที่เป็นตัวดึงดูดทางคณิตศาสตร์ สำหรับส่วนผสมของกระบวนการอิสระที่ดูเผินๆ ไม่เกี่ยวข้องกัน เมื่อมองการแจกแจงพื้นฐานเป็นตัวแปรสุ่ม ทฤษฎีบทแสดงว่ากฎนี้ไม่ใช่เรื่องบังเอิญ มันเป็นผลพลอยได้เมื่อผสมการแจกแจงจำนวนมากเข้าด้วยกัน

Implications for Real-World Bookkeeping

นัยสำคัญต่องานบัญชีในโลกความเป็นจริง

Real-world bookkeeping often involves the aggregation of multiple, independent sources of financial data, which mirrors the mechanism described by Theodore P. Hill in 1995. Because financial statements are constructed from various accounts, the resulting mixture of distributions naturally tends toward the logarithmic distribution of digits over time. However, the explanatory reach of this mathematical phenomenon is qualified by R.M. Fewster (2009), who argues that the theorem is rigorous without being diagnostic. Fewster (2009) notes that while the derivation explains why Benford's law appears in nature, it gives us little insight into why it applies or when. Consequently, analysts must recognize that satisfying the requirements for a mixture does not confirm the absence of human intervention or potential manipulation in the books. The statistical derivation provides a baseline for expected behavior but does not inherently validate the specific integrity of every individual entry within a ledger.

งานบัญชีจริงรวมข้อมูลการเงินจากหลายแหล่งที่เป็นอิสระต่อกัน ตรงกับกลไกที่ Theodore P. Hill อธิบายไว้ในปี 1995 งบการเงินประกอบขึ้นจากบัญชีหลายประเภท ส่วนผสมของการแจกแจงที่ได้จึงเอนเข้าหาการแจกแจงแบบลอการิทึมของตัวเลขไปเอง เมื่อเวลาผ่านไป แต่ขอบเขตที่ปรากฏการณ์ทางคณิตศาสตร์นี้อธิบายได้มีข้อจำกัด R.M. Fewster (2009) แย้งว่าทฤษฎีบทรัดกุม แต่ไม่ได้วินิจฉัยอะไร Fewster (2009) ตั้งข้อสังเกตว่าบทพิสูจน์บอกได้ว่าทำไมกฎของ Benford จึงปรากฏในธรรมชาติ แต่แทบไม่บอกเลยว่าทำไมมันจึงใช้ได้กับข้อมูลชุดหนึ่ง หรือใช้ได้เมื่อใด นักวิเคราะห์จึงต้องรู้ว่าข้อมูลที่เข้าเงื่อนไขของส่วนผสมไม่ได้ยืนยันว่าไม่มีมอมมนุษย์แทรกแซงหรือตกแต่งบัญชี บทพิสูจน์ทางสถิติให้เพียงเกณฑ์ว่าพฤติกรรมที่คาดหวังควรเป็นอย่างไร มันไม่ได้รับรองความถูกต้องของแต่ละรายการในบัญชีแยกประเภทในตัวเอง

The Limits of the Theorem

ขีดจำกัดของทฤษฎีบท

The theorem is not contested as a valid mathematical result, yet R.M. Fewster (2009) disputes its practical utility for identifying anomalies in specific datasets. Fewster (2009) maintains that the theorem remains a descriptive tool rather than a diagnostic one, limiting its use as a definitive detector for fraud. The mathematical derivation is a statement about convergence in the limit, which may not always manifest in datasets with small sample sizes or specific constraints.

ในฐานะผลลัพธ์ทางคณิตศาสตร์ ทฤษฎีบทนี้ไม่มีใครโต้แย้ง สิ่งที่ R.M. Fewster (2009) โต้แย้งคือประโยชน์เชิงปฏิบัติของมันในการชี้ความผิดปกติในชุดข้อมูลชุดใดชุดหนึ่ง Fewster (2009) ยืนยันว่าทฤษฎีบทเป็นเครื่องมือเชิงพรรณนา ไม่ใช่เครื่องมือเชิงวินิจฉัย ข้อนี้จำกัดการเชื่อมั่นเป็นตัวตรวจจับการฉ้อโกงที่ชี้ขาดได้ บทพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์เป็นข้อความว่าด้วยการลู่เข้าในขีดจำกัด ชุดข้อมูลที่มีตัวอย่างน้อยหรือมีข้อจำกัดเฉพาะอาจไม่แสดงการลู่เข้านั้นให้เห็นเสมอไป

Example: A chorus of many different singers hitting random notes will eventually produce a harmonious average, even if no single singer is perfect.

ตัวอย่าง: นักร้องหลายคนต่างคนต่างร้องโน้ตแบบสุ่ม เสียงเฉลี่ยของทั้งวงจะกลมกลืนในที่สุด แม้ไม่มีนักร้องคนใดร้องได้สมบูรณ์แบบเลยก็ตาม

Verdict. The theorem explains why Benford's law emerges from complexity but cannot inherently distinguish between natural growth and carefully concealed human manipulation.

คำตัดสิน. ทฤษฎีบทนี้อธิบายได้ว่าทำไมกฎของ Benford จึงโผล่ออกมาจากความซับซ้อน แต่โดยตัวมันเองแยกไม่ออกว่าตัวเลขมาจากการเติบโตตามธรรมชาติ หรือจากมือมนุษย์ที่ตกแต่งแล้วปกปิดไว้อย่างแนบเนียน

Overtuned if: A rigorous replication fails to show convergence when mixing random samples from a broad, diverse set of well-defined, non-Benford probability distributions.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: การทำซ้ำอย่างรัดกุมไม่พบการลู่เข้า เมื่อผสมตัวอย่างสุ่มจากชุดการแจกแจงความน่าจะเป็นที่กว้าง หลากหลาย นิยามชัด และไม่ใช้การแจกแจงแบบ Benford

Sources. 1995 · Theodore P. Hill, "A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law" — [Project Euclid](<https://projecteuclid.org/journals/statistical-science/volume-10/issue-4/A-Statistical-Derivation-of-the-Significant-Digit-Law/10.1214/ss/1177009869.full>) · **2009** · R.M. Fewster, "A Simple Explanation of Benford's Law" — [PDF](https://web.williams.edu/Mathematics/sjmillier/public_html/cmu/21-499/handouts/benford/Fewster_SimpleExplanationBenfordLaw.pdf)

แหล่งอ้างอิง. 1995 · Theodore P. Hill, "A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law" — [Project Euclid](<https://projecteuclid.org/journals/statistical-science/volume-10/issue-4/A-Statistical-Derivation-of-the-Significant-Digit-Law/10.1214/ss/1177009869.full>) · **2009** · R.M. Fewster, "A Simple Explanation of Benford's Law" — [PDF](https://web.williams.edu/Mathematics/sjmillier/public_html/cmu/21-499/handouts/benford/Fewster_SimpleExplanationBenfordLaw.pdf)

The Auditor's Tool — Nigrini and Forensic Accounting

From Curiosity to Instrument

จากความอยากรู้อยากเห็นสู่เครื่องมือใช้งานจริง

Mark J. Nigrini transformed Benford's law from a mathematical curiosity into a rigorous forensic-accounting screening tool in his 1999 article published in the Journal of Accountancy. This transition required establishing that digit-frequency analysis could serve as a systematic method for detecting irregularities within large, complex financial datasets used by professional accountants. By 1999, Nigrini demonstrated that auditors could identify potential anomalies by comparing the observed distribution of leading digits against the expected logarithmic patterns defined by the law. The adoption of these tests by the accounting profession shifted the focus from anecdotal suspicion to a measurable, data-driven approach for identifying problematic entries. This evolution turned abstract probability into a practical, repeatable instrument that allows forensic professionals to prioritize their investigative efforts on specific segments of financial information.

กฎของ Benford กลายเป็นเครื่องมือคัดกรองทางนิติบัญชีศาสตร์ที่เข้มงวดในปี 1999 เมื่อ Mark J. Nigrini ตีพิมพ์บทความใน Journal of Accountancy ก่อนหน้านั้นมันเป็นเพียงเรื่องแปลกทางคณิตศาสตร์ การข้ามเส้นนี้ต้องพิสูจน์ก่อนว่าการวิเคราะห์ความถี่ของตัวเลขใช้ตรวจหาความผิดปกติในชุดข้อมูลการเงินขนาดใหญ่และซับซ้อนที่นักบัญชีมืออาชีพใช้งานได้อย่างเป็นระบบ ภายในปี 1999 Nigrini แสดงให้เห็นว่าผู้ตรวจสอบบัญชีหาความผิดปกติที่อาจซ่อนอยู่ได้โดยเทียบการแจกแจงของเลขนำที่สังเกตได้กับรูปแบบลอการิทึมที่กฎกำหนดไว้ วิชาชีพบัญชีรับการทดสอบเหล่านี้ไปใช้ และจุดเน้นก็ย้ายจากความสงสัยตามคำบอกเล่าไปสู่แนวทางที่วัดผลได้และขับเคลื่อนด้วยข้อมูลในการชี้รายการที่มีปัญหา ความน่าจะเป็นเชิงนามธรรมจึงกลายเป็นเครื่องมือที่ใช้งานจริงและทำซ้ำได้ ผู้เชี่ยวชาญด้านนิติวิทยาศาสตร์เชื่อมั่นเลือกที่จะทุ่มเทการสืบสวนไปที่ส่วนไหนของข้อมูลการเงิน

The Admissibility of Deviation

การยอมรับการเบี่ยงเบนเป็นหลักฐาน

The legal standing of this methodology was solidified in the 2015 case of *United States v. Channon*, heard in the U.S. District Court for the District of New Mexico. During these proceedings, the court reviewed a consolidated motion to exclude the testimony of forensic accountant Janet McHard, which challenged the validity of her digit-frequency analysis. The court denied this motion on December 2, 2015, ruling that the analysis developed by Nigrini was generally accepted within the relevant community and had survived rigorous peer review. Under the standards of *Daubert* and Rule 702, the court recognized that these tests are scientifically sound enough to serve as expert testimony when challenging spreadsheet evidence. However, the court emphasized that a deviation from the expected distribution is simply an indicator that a problem exists within the data, rather than a definitive verdict of criminal fraud. This distinction is vital because the instrument serves to flag items for a closer, manual inspection rather than functioning as an automated judge of human intent or guilt.

ศาลรับรองสถานะทางกฎหมายของระเบียบวิธีนี้ในคดีปี 2015 *United States v. Channon* ที่ศาลแขวงสหรัฐฯ ประจำเขตมลรัฐนิวเม็กซิโก ระหว่างพิจารณาดี ศาล ทบทวนคำร้องร่วมขอคัดค้านคำให้การของ Janet McHard นักนิติบัญชีศาสตร์ คำร้อง นั้นโต้แย้งว่าการวิเคราะห์ความถี่ของตัวเลขที่เธอใช้ไม่ถูกต้อง ศาลยกคำร้องเมื่อวันที่ 2 ธันวาคม 2015 ด้วยเหตุผลว่าการวิเคราะห์ที่ Nigrini พัฒนาขึ้นเป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป ในกลุ่มผู้เชี่ยวชาญที่เกี่ยวข้อง และผ่านการทบทวนโดยผู้ทรงคุณวุฒิที่เข้มงวดมาแล้ว ภายใต้มาตรฐาน *Daubert* และกฎข้อที่ 702 ศาลถือว่าการทดสอบเหล่านี้หนักแน่นทาง วิทยาศาสตร์พอจะเป็นคำให้การของผู้เชี่ยวชาญเมื่อต้องโต้แย้งหลักฐานจากสเปรดชีต แต่ศาลยังข้อจำกัดไว้ด้วย ตัวเลขที่เบี่ยงจากการแจกแจงที่คาดหวังเป็นเพียงตัวบ่งชี้ว่า ข้อมูลมีปัญหา ไม่ใช่คำตัดสินชี้ขาดว่าฉ้อโกงทางอาญา ข้อแตกต่างนี้สำคัญ เพราะ เครื่องมือนี้มีหน้าที่แจ้งเตือนรายการให้คนเข้าไปตรวจสอบด้วยตนเองอย่างละเอียดขึ้น ไม่ใช่ตัดสินเจตนาหรือความผิดของมนุษย์แทนคนโดยอัตโนมัติ

The Base Rate and Forensic Reality

อัตราพื้นฐานและความเป็นจริงทางนิติวิทยาศาสตร์

There is no serious dispute found regarding the admissibility of these methods in professional forensic practice or within the U.S. federal court system. The methodology remains a screening tool for identifying potential anomalies that warrant further investigation by a qualified professional. Because a deviation is not proof of fraud, the base rate problem reminds us that an flagged entry is merely a signal to investigate further.

ไม่พบข้อโต้แย้งที่จริงจังต่อการยอมรับวิธีการเหล่านี้ ทั้งในทางปฏิบัติของนิติบัณชี าสตร์และในระบบศาลรัฐบาลกลางของสหรัฐฯ ระเบียบวิธีนี้ยังคงเป็นเครื่องมือคัด กรอง มันชี้ความผิดปกติที่อาจเกิดขึ้นเพื่อให้ผู้เชี่ยวชาญที่มีคุณสมบัติเหมาะสมสืบต่อ การเบี่ยงเบนไม่ใช่ข้อพิสูจน์ของการฉ้อโกง ปัญหาเรื่องอัตราพื้นฐานจึงเตือนว่ารายการที่ ถูกแจ้งเตือนเป็นเพียงสัญญาณให้สืบสวนเพิ่มเติมเท่านั้น

Example: A metal detector identifies the presence of dense material, but it cannot distinguish between a hidden gold coin and a common iron nail.

ตัวอย่าง: เครื่องตรวจจับโลหะบอกได้ว่ามีวัตถุหนาแน่นอยู่ตรงนั้น แต่บอกไม่ได้ว่าเป็น เหรียญทองที่ซ่อนไว้หรือตะปูเหล็กธรรมดา

Verdict. A deviation provides objective grounds for a closer look at the underlying data but does not constitute a verdict of guilt.

คำตัดสิน. การเบี่ยงเบนให้เหตุผลเชิงวัตถุวิสัยพอที่จะเข้าไปดูข้อมูลพื้นฐานให้ละเอียด ขึ้น แต่ไม่ใช่คำตัดสินว่ามีความผิด

Overtaken if: A court ruling determines that the digit-frequency analysis fails the Daubert standard or is no longer considered generally accepted by the forensic accounting community.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: ศาลวินิจฉัยว่าการวิเคราะห์ความถี่ของตัวเลขไม่ผ่านมาตรฐาน Daubert หรือวงการนิติบัณชีศาสตร์เลิกถือว่ามันเป็นที่ยอมรับโดยทั่วไป

Sources. **1999** · Mark J. Nigrini, "I've Got Your Number" — [Journal of Accountancy](<https://www.journalofaccountancy.com/issues/1999/may/nigrini/>) · **2015** · U.S. District Court, D.N.M., Memorandum Opinion and Order, *United States v. Channon* — [PDF](https://www.govinfo.gov/content/pkg/USCOURTS-nmd-1_13-cr-00966/pdf/USCOURTS-nmd-1_13-cr-00966-4.pdf)

แหล่งอ้างอิง. **1999** · Mark J. Nigrini, "I've Got Your Number" — [Journal of Accountancy](<https://www.journalofaccountancy.com/issues/1999/may/nigrini/>) · **2015** · U.S. District Court, D.N.M., Memorandum Opinion and Order, *United States v. Channon* — [PDF](https://www.govinfo.gov/content/pkg/USCOURTS-nmd-1_13-cr-00966/pdf/USCOURTS-nmd-1_13-cr-00966-4.pdf)

National Accounts — Transparency Between States

The Stability of Numbers

ความเสถียรของตัวเลข

Governments report specific macroeconomic data to Eurostat under the Stability and Growth Pact to maintain transparency and fiscal discipline across the diverse European Union member states. Researchers Bernhard Rauch, Max Göttsche, Gernot Brähler, and Stefan Engel investigated whether Benford's law could serve as a diagnostic tool for detecting potential manipulation of these figures. They examined deficit-criteria data for EU member states between 1999 and 2009 to see if the reported digits followed the expected mathematical distribution of natural numbers. The study identified that Greek data showed the most significant deviation from Benford's law among all euro-area states during the period leading up to the 2009 revelation. This specific finding suggests that statistical anomalies in reported accounts can serve as an early signal for auditors to investigate the underlying integrity of governmental economic claims.

ข้อมูลของกรีซเบี่ยงเบนจากกฎของ Benford มากที่สุดในบรรดารัฐกลุ่มยูโรโซนทั้งหมด ในช่วงก่อนที่เรื่องจะถูกเปิดเผยในปี 2009 นั่นคือข้อค้นพบของนักวิจัย Bernhard Rauch, Max Göttsche, Gernot Brähler และ Stefan Engel ผู้ตั้งคำถามว่ากฎของ Benford ใช้เป็นเครื่องมือวินิจฉัยเพื่อจับการปรับแต่งตัวเลขเหล่านี้ได้หรือไม่ ตัวเลขที่ว่าคือข้อมูลเศรษฐกิจมหภาคชุดที่กำหนด รัฐบาลต้องรายงานต่อ Eurostat ภายใต้ข้อตกลง Stability and Growth Pact เพื่อรักษาความโปร่งใสและวินัยทางการคลังในหมู่ประเทศสมาชิกสหภาพยุโรปที่แตกต่างกันมาก พวกเขาตรวจสอบข้อมูลเกณฑ์การขาดดุลของประเทศสมาชิกสหภาพยุโรประหว่างปี 1999 ถึง 2009 แล้วดูว่าเลขที่รายงานเป็นไปตามการแจกแจงทางคณิตศาสตร์ที่คาดหวังของตัวเลขธรรมชาติหรือไม่ ข้อค้นพบเรื่องกรีซชี้ว่าความผิดปกติทางสถิติในบัญชีที่รายงานเป็นสัญญาณเตือนเบื้องต้นได้ให้ผู้ตรวจสอบบัญชีเข้าไปตรวจว่าตัวเลขเศรษฐกิจที่รัฐบาลอ้างนั้นถูกต้องจริงหรือไม่

The Limits of Statistical Inference

ขีดจำกัดของการอนุมานทางสถิติ

In 2009, Jesus Gonzalez-Garcia and Gonzalo C. Pastor of the IMF conducted a broader assessment by testing various macroeconomic data series against Benford's law distributions. They compared these statistical results against independent IMF data-quality ROSC ratings to determine if nonconformity reliably pointed toward poor quality or intentional tampering with the records. The IMF researchers discovered that a lack of conformity with Benford's law did not reliably track with the actual, independently-rated quality of the macroeconomic data series. Instead, they observed that these deviations often reflect ordinary structural shifts within a complex economy rather than evidence of systematic deception or poor data management practices. Their work demonstrates that the law is not a universal audit tool, as macroeconomic series frequently possess internal characteristics that naturally diverge from the expected digit distribution.

กฎของ Benford ไม่ใช่เครื่องมือตรวจสอบบัญชีที่ใช้ได้ทั่วไป นั่นคือข้อสรุปของ Jesus Gonzalez-Garcia และ Gonzalo C. Pastor จาก IMF ในปี 2009 หลังประเมินในวงกว้างกว่าเดิม พวกเขาทดสอบชุดข้อมูลเศรษฐกิจมหภาคหลายชุดเทียบกับการแจกแจงตามกฎ แล้วนำผลทางสถิติไปเทียบกับคะแนนคุณภาพข้อมูล ROSC ของ IMF ที่ประเมินแยกกันอย่างอิสระ เพื่อดูว่าความไม่สอดคล้องซึ่งไปที่คุณภาพต่ำหรือการปลอมแปลงบันทึกโดยเจตนาได้อย่างน่าเชื่อถือหรือไม่ นักวิจัยของ IMF พบว่าไม่ได้ ความไม่สอดคล้องกับกฎของ Benford ไม่ได้เดินตามคุณภาพจริงของชุดข้อมูลเศรษฐกิจมหภาคที่ประเมินอย่างอิสระอย่างน่าเชื่อถือ สิ่งที่พวกเขาเห็นแทนคือความเบี่ยงเบนเหล่านี้มักสะท้อนว่าโครงสร้างของเศรษฐกิจที่ซับซ้อนซับซ้อนไปตามปกติ ไม่ใช่หลักฐานว่ามีใครหลอกลวงอย่างเป็นระบบหรือจัดการข้อมูลอย่างแย่ เหตุผลก็คือชุดข้อมูลเศรษฐกิจมหภาคมักมีลักษณะภายในที่ทำให้ตัวเลขเบี่ยงจากการแจกแจงที่คาดหวังโดยธรรมชาติอยู่แล้ว

A Contested Diagnostic

การวินิจฉัยที่ถูกโต้แย้ง

The findings of Gonzalez-Garcia and Pastor directly qualify and contest the headline results presented by Rauch et al. regarding the efficacy of this statistical method. The IMF authors explicitly state that nonconformity with Benford's law should not be interpreted as a reliable indication of poor quality in macroeconomic data reporting. The simple act of publishing these statistics acts as a deterrent because governments know their figures are subject to public scrutiny and potential mathematical verification.

ข้อค้นพบของ Gonzalez-Garcia และ Pastor จำกัดขอบเขตและโต้แย้งผลพาดหัวของ Rauch และคณะ โดยตรง ในเรื่องว่าวิธีทางสถิตินี้ใช้ได้ผลแค่ไหน ผู้เขียนจาก IMF ระบุชัดเจนว่าความไม่สอดคล้องกับกฎของ Benford ไม่ควรถูกตีความเป็นข้อบ่งชี้ที่เชื่อถือได้ว่าข้อมูลเศรษฐกิจมหภาคที่รายงานมีคุณภาพต่ำ กระนั้นแค่เผยแพร่สถิติเหล่านี้ก็ช่วยได้ในตัว เพราะรัฐบาลรู้ว่าตัวเลขของตนถูกสาธารณะจับตา และอาจถูกนำไปพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ได้

Example: A deviation from the law is like a fingerprint found at a scene; it warrants further investigation but cannot prove the crime by itself.

ตัวอย่าง: ความเบี่ยงเบนจากกฎก็เหมือนลายนิ้วมือที่พบในที่เกิดเหตุ มันสมควรให้สอบสวนต่อ แต่ลำพังตัวมันเองพิสูจน์ความผิดไม่ได้

Verdict. Benford's law provides a checkable claim for auditors but serves as a poor substitute for a comprehensive and independent review of fiscal data.

คำตัดสิน. กฎของ Benford ให้ข้อเรียกร้องที่ตรวจสอบได้แก่ผู้ตรวจสอบบัญชี แต่หากใช้แทนการทบทวนข้อมูลทางการคลังที่ครอบคลุมและเป็นอิสระ มันเป็นตัวแทนที่แย่

Overtuned if: A rigorous study demonstrates that a specific, consistent deviation in deficit-criteria data perfectly predicts confirmed cases of government accounting fraud across all monitored states.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: มีการศึกษาที่เข้มงวดแสดงให้เห็นว่าความเบี่ยงเบนแบบเฉพาะเจาะจงและสม่ำเสมอในข้อมูลเกณฑ์การขาดดุล ทำนายกรณีฉ้อโกงทางบัญชีของรัฐบาลที่ได้รับการยืนยันแล้วได้อย่างแม่นยำ ในทุกรัฐที่ถูกตรวจสอบ

Sources. 2011 · Bernhard Rauch, Max Götsche, Gernot Brähler, Stefan Engel, "Fact and Fiction in EU-Governmental Economic Data" — [University of Regensburg record](<https://epub.uni-regensburg.de/64742/>) · **2009** · Jesus Gonzalez-Garcia, Gonzalo C. Pastor, "Benford's Law and Macroeconomic Data Quality" — [IMF Working Paper 09/10](<https://www.imf.org/external/pubs/ft/wp/2009/wp0910.pdf>)

แหล่งอ้างอิง. 2011 · Bernhard Rauch, Max Götsche, Gernot Brähler, Stefan Engel, "Fact and Fiction in EU-Governmental Economic Data" — [University of Regensburg record](<https://epub.uni-regensburg.de/64742/>) · **2009** · Jesus Gonzalez-Garcia, Gonzalo C. Pastor, "Benford's Law and Macroeconomic Data Quality" — [IMF Working Paper 09/10](<https://www.imf.org/external/pubs/ft/wp/2009/wp0910.pdf>)

Chapter 8

The Election Error — Where the Law Was Abused

The Seduction of Simple Statistics

เสน่ห์ของสถิติแบบง่าย

Benford's Law describes how the leading digits of datasets spanning several orders of magnitude often follow a specific, predictable logarithmic distribution. In 2020, this mathematical curiosity was repurposed as a tool to allege widespread electoral fraud within the United States precinct-level vote counts. Walter R. Mebane, Jr., a prominent expert in election forensics, investigated these claims by applying his own rigorous statistical models to specific jurisdictions. He examined the 2020 Milwaukee and Allegheny County precinct-level vote data to see if the alleged anomalies held any real mathematical weight. His analysis yielded an estimated probability of "no fraud" equal to .9797 for Milwaukee and .9839 for Allegheny County, refuting the fraud narrative. The application of the law had become a slogan used to manufacture a false sense of certainty for an audience unfamiliar with its limits.

กฎของ Benford ถูกยกไปเป็นคำขวัญกล่าวหาการฉ้อโกงเลือกตั้ง และเมื่อตรวจด้วยเครื่องมือจริง ข้อกล่าวหาเหล่านั้นไม่เหลือน้ำหนัก ตัวกฎเองบอกเพียงว่า เลขนำของชุดข้อมูลที่กินหลายอันดับความใหญ่ มักแจกแจงแบบลอการิทึมตามรูปแบบเฉพาะที่คาดได้ ในปี 2020 ข้อสังเกตทางคณิตศาสตร์ข้อนี้ถูกหยิบไปเป็นเครื่องมือกล่าวหาว่ามีการฉ้อโกงในวงกว้างในผลนับคะแนนระดับหน่วยเลือกตั้งของสหรัฐอเมริกา Walter R. Mebane, Jr. ผู้เชี่ยวชาญด้านนิติบัญญัติศาสตร์การเลือกตั้ง ตรวจข้อกล่าวหาเหล่านี้ด้วยแบบจำลองสถิติที่เข้มงวดของเขาเอง เจาะเป็นรายเขตอำนาจศาล เขาใช้ข้อมูลนับคะแนนระดับหน่วยเลือกตั้งของ Milwaukee และ Allegheny County ปี 2020 เพื่อดูว่าความผิดปกติที่ถูกกล่าวอ้างมีน้ำหนักทางคณิตศาสตร์จริงหรือไม่ ผลคือความน่าจะเป็นโดยประมาณของ "ไม่มีการฉ้อโกง" เท่ากับ .9797 สำหรับ Milwaukee และ .9839 สำหรับ Allegheny County คำบอกเล่าเรื่องฉ้อโกงถูกหักล้าง กฎถูกใช้เป็นคำขวัญ สร้างความมั่นใจปลอมให้ผู้ฟังที่ไม่รู้ขีดจำกัดของมัน

The Failure of the First-Digit Test

ความล้มเหลวของการทดสอบเลขนำ

The primary error in these election-related claims lies in the naive application of first-digit tests to data that does not meet the necessary criteria. Theodore P. Hill explained in 2020 that there is a widespread error in the use of Benford's Law when the data lacks sufficient orders of magnitude. Mebane clarified that the first digit in precinct-level vote counts is largely determined by the number of voters registered or present in each distinct precinct. This structural feature of election data has nothing whatsoever to do with any kind of election fraud, despite what the popular, simplified narratives suggested. Because the precinct sizes are restricted by geography and population density, they fail to span the wide numerical range required for the law to apply. Mebane's own 2020 research found essentially no evidence that election frauds occurred in the specific jurisdictions he analyzed using his forensic models.

ข้อผิดพลาดหลักของข้อกล่าวหาเหล่านี้อยู่ที่การเอาการทดสอบเลขนำไปใช้กับข้อมูล โดยไม่ดูว่าข้อมูลเข้าเกณฑ์ที่จำเป็นหรือไม่ Theodore P. Hill อธิบายไว้ในปี 2020 ว่ากฎของ Benford ถูกใช้ผิดกันในวงกว้างเมื่อข้อมูลมีอันดับความใหญ่ไม่พอ Mebane ชี้ต่อว่า เลขนำของคะแนนระดับหน่วยเลือกตั้งถูกกำหนดเป็นหลักโดยจำนวนผู้ลงทะเบียนหรือผู้มาใช้สิทธิในแต่ละหน่วย ลักษณะเชิงโครงสร้างข้อนี้ของข้อมูลเลือกตั้งไม่เกี่ยวอะไรกับการฉ้อโกงเลือกตั้งเลย ต่างจากที่คำบอกเล่าแบบง่ายซึ่งแพร่หลายพยายามชี้ ขนาดของหน่วยเลือกตั้งถูกจำกัดด้วยภูมิศาสตร์และความหนาแน่นประชากร ช่วงตัวเลขจึงแคบเกินกว่าที่กฎจะใช้ได้ งานวิจัยของ Mebane เองในปี 2020 แทบไม่พบหลักฐานว่ามีการฉ้อโกงเลือกตั้งในเขตอำนาจศาลที่เขาตรวจด้วยแบบจำลองนิติบัญญัติศาสตร์

A Dispute of Methodology

ข้อโต้แย้งทางระเบียบวิธี

The debate surrounding these findings is not a clash between mainstream science and fringe critics, but rather a rejection by the field's own methodologists. Walter R. Mebane, Jr. explicitly contested the validity of the naive first-digit applications that were being circulated to characterize the 2020 election results. Theodore P. Hill similarly contested the statistical soundness of applying these tests to election data that lacks the required orders of magnitude for validity.

การถกเถียงเรื่องผลลัพธ์เหล่านี้ไม่ใช่วิทยาศาสตร์กระแสหลักปะทะนักวิจารณ์ขายขอบมันคือนักระเบียบวิธีวิจัยของสาขานั้นเองที่ปฏิเสธ Walter R. Mebane, Jr. โต้แย้งตรงๆ ว่าการทดสอบเลขนำแบบไม่ดูเกณฑ์ ที่ถูกส่งต่อกันเพื่ออธิบายผลเลือกตั้งปี 2020 นั้นใช้ไม่ได้ Theodore P. Hill โต้แย้งในทางเดียวกัน ว่าการเอาการทดสอบเหล่านี้ไปใช้กับข้อมูลเลือกตั้งที่ขาดอันดับความใหญ่ตามที่ถูกต้องการ ไม่มีความแน่นอนทางสถิติรองรับ

Example: Using a ruler meant for inches to measure the weight of an object and claiming the resulting error proves the object is missing mass.

ตัวอย่าง: เอาไม้บรรทัดวัดนิ้วไปชั่งน้ำหนักวัตถุ แล้วอ้างว่าค่าที่คลาดไปคือหลักฐานว่าวัตถุนั้นมวลหายไป

Verdict. The application of first-digit Benford tests to precinct-level vote counts is scientifically invalid and fails to provide evidence of electoral manipulation.

คำตัดสิน. การทดสอบเลขนำของ Benford ใช้กับคะแนนระดับหน่วยเลือกตั้งไม่ได้ตามหลักวิทยาศาสตร์ และไม่ให้หลักฐานใดๆ ว่ามีการบิดเบือนการเลือกตั้ง

Overtuned if: A study demonstrates that precinct-level vote counts naturally span multiple orders of magnitude across all jurisdictions, satisfying the fundamental requirement for Benford's Law.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: มีการศึกษาแสดงว่าคะแนนระดับหน่วยเลือกตั้งกินช่วงหลายอันดับความใหญ่ตามธรรมชาติในทุกเขตอำนาจศาล นั่นคือผ่านข้อกำหนดพื้นฐานของกฎของ Benford

Sources. 2020 · Walter R. Mebane, Jr., "Inappropriate Applications of Benford's Law Regularities to Some Data from the 2020 Presidential Election in the United States" — [PDF](<https://websites.umich.edu/~wmebane/inapB.pdf>) · **2020** · Theodore P. Hill, "A Widespread Error in the Use of Benford's Law to Detect Election and Other Fraud" — [arXiv:2011.13015](<https://arxiv.org/pdf/2011.13015>)

แหล่งอ้างอิง. 2020 · Walter R. Mebane, Jr., "Inappropriate Applications of Benford's Law Regularities to Some Data from the 2020 Presidential Election in the United States" — [PDF](<https://websites.umich.edu/~wmebane/inapB.pdf>) · **2020** · Theodore P. Hill, "A Widespread Error in the Use of Benford's Law to Detect Election and Other Fraud" — [arXiv:2011.13015](<https://arxiv.org/pdf/2011.13015>)

Science and Clinical Data — Integrity Screening

The Application of Distribution Tests

การประยุกต์ใช้การทดสอบการแจกแจง

Digit-distribution tests serve as a diagnostic tool for researchers investigating the integrity of published scientific literature. Andreas Diekmann noted in his 2007 study, "Not the First Digit! Using Benford's Law to Detect Fraudulent Scientific Data," that these methods provide a unique lens for identifying fabrication. His work demonstrated that while faked first digits might mimic the expected Benford's Law decline, the second, third, and fourth digits often reveal significant deviations. This research highlights that a screening process must look beyond the most prominent digit to gain a clearer understanding of the underlying numerical structure. By examining these deeper distribution patterns, scientists can better evaluate whether the reported data aligns with the statistical expectations of natural phenomena. The utility of this instrument lies in its ability to highlight anomalies that warrant closer inspection by the broader scientific community.

การทดสอบการแจกแจงของตัวเลขเป็นเครื่องมือวินิจฉัย นักวิจัยใช้มันตรวจสอบว่างานวิทยาศาสตร์ที่ตีพิมพ์แล้วมีข้อมูลสมบูรณ์จริงหรือไม่ Andreas Diekmann เขียนไว้ในการศึกษาปี 2007 เรื่อง "Not the First Digit! Using Benford's Law to Detect Fraudulent Scientific Data" ว่าวิธีนี้ให้มุมมองเฉพาะตัวในการจับข้อมูลปลอม ประเด็นของเขาคือ เลขนำที่ปลอมขึ้นอาจเลียนแบบการลดลงตามกฎของ Benford ได้ แต่ตัวเลขหลักที่สอง สาม และสี่ มักเผยความเบี่ยงเบนอย่างมีนัยสำคัญ การคัดกรองจึงต้องมองไกลกว่าตัวเลขที่เด่นชัดที่สุด ถึงจะเห็นโครงสร้างตัวเลขที่ซ่อนอยู่ข้างใต้ชัดเจน เมื่อดูรูปแบบการแจกแจงในหลักที่ลึกลงไปเหล่านี้ นักวิทยาศาสตร์จะประเมินได้ดีขึ้นว่าข้อมูลที่รายงานมาสอดคล้องกับความคาดหวังทางสถิติของปรากฏการณ์ธรรมชาติหรือไม่ ประโยชน์ของเครื่องมือนี้โดยตรงที่มันชี้ความผิดปกติที่สมควรให้ชุมชนวิทยาศาสตร์ในวงกว้างเข้าไปตรวจสอบอย่างละเอียดกว่าเดิม

Screening Clinical Trial Results

การคัดกรองผลการทดลองทางคลินิก

John B. Carlisle provided a rigorous demonstration of these principles in his 2012 paper, "The Analysis of 168 Randomised Controlled Trials to Test Data Integrity." He examined 168 randomised controlled trials by a single author, covering the period between 1991 and 2011, to determine if the reported statistics were consistent with chance. The results were striking: 28 of the 33 tested variables, representing 85% of the data, showed distributions that were statistically inconsistent with the expected patterns. This multi-method statistical screen, which incorporated digit-based tests, served as the primary trigger for a deeper scrutiny of the author's work. The subsequent investigation led to a significant mass-retraction case, proving the effectiveness of these screening tools in maintaining the standards of clinical research. The methodology serves as a warning that aggregated data should behave in predictable ways, and departures from these norms can signal a need for institutional review.

ตัวแปร 28 จาก 33 ตัวที่ทดสอบ คิดเป็น 85% ของข้อมูล มีการแจกแจงที่ไม่สอดคล้องทางสถิติกับรูปแบบที่คาดหวัง นั่นคือผลจากบทความปี 2012 ของ John B. Carlisle เรื่อง "The Analysis of 168 Randomised Controlled Trials to Test Data Integrity" ที่สาริตหลักการเหล่านี้อย่างเข้มงวด เขาตรวจการทดลองแบบสุ่มและมีกลุ่มควบคุม 168 รายการที่ผู้เขียนคนเดียวตีพิมพ์ระหว่างปี 1991 ถึง 2011 เพื่อตัดสินว่าสถิติที่รายงานมาสอดคล้องกับความบังเอิญหรือไม่ ผลออกมาขัด การคัดกรองทางสถิติหลายวิธีชุดนี้มีการทดสอบด้วยตัวเลขรวมอยู่ด้วย และนั่นคือตัวจุดชนวนหลักให้ตรวจงานของผู้เขียนคนนั้น ลึกลงไป การสอบสวนที่ตามมาจบลงที่กรณีเพิกถอนผลงานวิจัยจำนวนมากครั้งสำคัญ และพิสูจน์ว่าเครื่องมือคัดกรองแบบนี้รักษามาตรฐานของการวิจัยทางคลินิกได้จริงระเบียบวิธีนี้เป็นคำเตือนว่าข้อมูลที่รวบรวมมาควรมีพฤติกรรมที่คาดการณ์ได้ และเมื่อมันเบี่ยงจากบรรทัดฐานนั้น ก็เป็นสัญญาณว่าอาจต้องให้สถาบันเข้ามาตรวจสอบ

The Limits of Statistical Suspicion

ขอบเขตของข้อสงสัยทางสถิติ

There is no serious dispute found regarding the findings presented in the papers authored by either Andreas Diekmann or John B. Carlisle. Both researchers explicitly frame their statistical results as a trigger for further scrutiny rather than as a definitive verdict of fraud. The danger remains that a statistic strong enough to convince a reader of an anomaly is also strong enough to unfairly convict the innocent.

ข้อค้นพบในบทความของ Andreas Diekmann และของ John B. Carlisle ไม่พบว่ามีใครโต้แย้งอย่างจริงจัง ทั้งสองคนบอกชัดว่าผลทางสถิติของตนเป็นตัวจุดชนวนให้ตรวจสอบ ไม่ใช่คำตัดสินขั้นสุดท้ายว่ามีการฉ้อโกง อันตรายยังอยู่ตรงนี้: สถิติที่แรงพอจะทำให้ผู้อ่านเชื่อว่ามีคามผิดปกติ ก็แรงพอจะตัดสินคนบริสุทธิ์อย่างไม่เป็นธรรมได้เช่นกัน

Example: A smoke detector indicates the presence of fire but does not identify the specific source of the heat or the intent of the person who lit the match.

ตัวอย่าง: เครื่องตรวจจับควันบอกได้ว่ามีไฟไหม้ แต่บอกไม่ได้ว่าความร้อนมาจากแหล่งไหน หรือคนที่จุดไม้ขีดไฟนั้นตั้งใจอะไร

Verdict. A positive result on a Benford's Law screen represents a call for a manual audit, not a final judgment of academic misconduct.

คำตัดสิน. ผลบวกจากการคัดกรองด้วยกฎของ Benford คือคำสั่งให้คนลงมือตรวจสอบเอง ไม่ใช่คำพิพากษาขั้นสุดท้ายว่าประพฤติดีผิดทางวิชาการ

Overtaken if: A replication of the clinical trial data shows that the reported distributions were actually consistent with the underlying trial design and variables.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: ทำซ้ำข้อมูลการทดลองทางคลินิกแล้วพบว่า การแจกแจงที่รายงานไว้สอดคล้องกับการออกแบบการทดลองและตัวแปรที่อยู่เบื้องหลังจริง

Sources. 2007 · Andreas Diekmann, "Not the First Digit! Using Benford's Law to Detect Fraudulent Scientific Data" — [Journal of Applied Statistics 34(3)](<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/02664760601004940>) · 2012 · John B. Carlisle, "The Analysis of 168 Randomised Controlled Trials to Test Data Integrity" — [Anaesthesia, Wiley] (<https://associationofanaesthetists-publications.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1365-2044.2012.07128.x>)

แหล่งอ้างอิง. 2007 · Andreas Diekmann, "Not the First Digit! Using Benford's Law to Detect Fraudulent Scientific Data" — [Journal of Applied Statistics 34(3)] (<https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/02664760601004940>) · 2012 · John B. Carlisle, "The Analysis of 168 Randomised Controlled Trials to Test Data Integrity" — [Anaesthesia, Wiley](<https://associationofanaesthetists-publications.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1365-2044.2012.07128.x>)

Second Digits and Beyond — The Fuller Law

The Expansion of Statistical Resolution

การขยายความละเอียดทางสถิติ

The examination of numerical distributions is not confined to the leading digit alone, as the underlying logic of the law extends to every subsequent decimal position. Walter R. Mebane, Jr. demonstrated in 2006 that the second-digit test, known as the 2BL test, provides an additional layer of scrutiny for analyzing data sets. By applying this method to precinct vote counts, researchers can identify patterns that might otherwise remain obscured when observing only the primary digit of a number. However, this increased granularity does not come without a cost, as it introduces a higher frequency of false positives that require careful and nuanced interpretation. In his 2006 study, Mebane noted that the 2BL test frequently flagged jurisdictions that were actually experiencing normal political phenomena rather than genuine instances of electoral fraud. This illustrates the fundamental tension between achieving higher statistical resolution and maintaining the practical utility of an analytical tool in real-world environments.

กฎนี้ไม่ได้หยุดอยู่ที่เลขนำ ตรรกะเดียวกันใช้ได้กับตัวเลขทุกตำแหน่งถัดไป Walter R. Mebane, Jr. แสดงในปี 2006 ว่าการทดสอบหลักที่สอง หรือที่เรียกกันว่าการทดสอบ 2BL เพิ่มขั้นตอนการตรวจสอบให้การวิเคราะห์ชุดข้อมูลได้อีกชั้นหนึ่ง เมื่อใช้กับจำนวน คะแนนเสียงในหน่วยเลือกตั้ง นักวิจัยเห็นรูปแบบที่จะถูกบดบังหากดูเพียงหลักแรกของตัวเลข แต่ความละเอียดที่เพิ่มขึ้นมีต้นทุน มันให้ผลบวกลวงถี่ขึ้น และผลบวกลวงต้องตีความอย่างระมัดระวังและถี่ถ้วน ในการศึกษาปี 2006 Mebane ตั้งข้อสังเกตว่าการทดสอบ 2BL ชี้เขตอำนาจศาลที่แท้จริงแล้วกำลังเผชิญปรากฏการณ์ทางการเมืองปกติอยู่บ่อยครั้ง ไม่ใช่การฉ้อโกงการเลือกตั้งจริง นี่คือการตีความพื้นฐานของเครื่องมือวิเคราะห์ ความละเอียดทางสถิติที่สูงขึ้นแลกมากับประโยชน์ใช้งานจริงในสภาพแวดล้อมจริง

Comparing the Power of Multi-Digit Tests

การเปรียบเทียบประสิทธิภาพของการทดสอบแบบหลายหลัก

Dieter W. Joenssen conducted a comprehensive Monte Carlo comparison in 2013 to evaluate how effectively various tests perform across a range of different sample sizes. His research measured performance across sample sizes from 25 to 10,000, utilizing 1,000,000 replications per cell to ensure the robustness of the statistical conclusions drawn. The testing of the joint first-two-digit distribution gained between 1 and 3 percentage points of power with the Kolmogorov-Smirnov and Freedman-Watson tests against alternative distributions. Despite these gains, the method is not universally superior, as Joenssen found that for the chi-squared test, one-digit testing remained favored at larger sample sizes. The complexity of selecting the correct test-and-digit-count combination means that analysts must be wary of assuming that more digits will always yield a clearer result. Ultimately, the trade-off between statistical power and the risk of misidentifying innocent data remains a central challenge for those applying these sophisticated numerical tests.

ยิ่งหลายหลักไม่ได้แปลว่ายิ่งชัดเสมอไป Dieter W. Joenssen เปรียบเทียบด้วยวิธี Monte Carlo อย่างครอบคลุมในปี 2013 เพื่อวัดว่าการทดสอบแต่ละแบบทำงานได้ดีเพียงใดในขนาดกลุ่มตัวอย่างที่ต่างกัน เขาวัดในกลุ่มตัวอย่างตั้งแต่ 25 ถึง 10,000 และจำลอง 1,000,000 ครั้งต่อเซลล์ เพื่อให้ข้อสรุปทางสถิติยืนได้มั่นคง การทดสอบการแจกแจงร่วมของเลขสองหลักแรกได้พลังทางสถิติเพิ่มขึ้นระหว่าง 1 ถึง 3 เปอร์เซ็นต์ ด้วยการทดสอบ Kolmogorov-Smirnov และ Freedman-Watson เมื่อเทียบกับการแจกแจงทางเลือก แต่วิธีนี้ไม่ได้เหนือกว่าในทุกกรณี Joenssen พบว่าสำหรับการทดสอบ chi-squared การทดสอบหลักเดียวยังเป็นตัวเลือกที่ดีกว่าในกลุ่มตัวอย่างขนาดใหญ่ เลือกว่าระหว่างการทดสอบกับจำนวนหลักให้ถูกจึงไม่ง่าย และนักวิเคราะห์ต้องไม่ทึกทักว่าหลักที่มากขึ้นจะให้ผลที่ชัดกว่าเสมอ ท้ายที่สุด โจทย์หลักของผู้ที่ใช้การทดสอบเชิงตัวเลขที่ซับซ้อนเหล่านี้ยังคงเป็นเรื่องเดิม พลังทางสถิติที่ได้มา แลกกับความเสี่ยงที่จะชี้ข้อมูลที่ไม่มีอะไรผิดว่าผิด

The Consensus on Complexity

ฉันทามติเกี่ยวกับความซับซ้อน

There is no serious dispute among experts that incorporating more digits into an analysis adds information that can be valuable for detecting specific anomalies. The literature currently disagrees on which specific test-and-digit-count combination performs best across the diverse variety of real-world scenarios encountered by investigators. This lack of uniformity suggests that the selection of a testing protocol must be tailored to the specific nature and size of the dataset being examined.

ผู้เชี่ยวชาญไม่มีข้อโต้แย้งจริงจังในข้อนี้ ยิ่งนำหลักตัวเลขเข้ามาวิเคราะห์มากขึ้น ข้อมูลก็เพิ่มขึ้น และข้อมูลนั้นมีค่าสำหรับจับความผิดปกติเฉพาะแบบ ที่เอกสารทางวิชาการยังเห็นไม่ตรงกันคือคูใดระหว่างการทดสอบกับจำนวนหลักที่ทำงานได้ดีที่สุดในสถานการณ์จริงหลากหลายแบบที่ผู้ตรวจสอบต้องเจอ เมื่อไม่มีคำตอบเดียว โปรโตคอลการทดสอบจึงต้องเลือกให้เข้ากับลักษณะและขนาดของชุดข้อมูลที่กำลังตรวจสอบเป็นรายกรณี

Example: Relying on the second digit to confirm a finding is like using a magnifying glass to check a signature that already appeared blurry to the naked eye.

ตัวอย่าง: อาศัยหลักที่สองมายืนยันผลลัพธ์ ก็เหมือนหยิบแว่นขยายมาส่องลายเซ็นที่ตาเปล่าก็เห็นว่าเลือนอยู่แล้ว

Verdict. Adding digits increases the sensitivity of the test but necessitates a higher threshold for evidence to avoid convicting innocent parties of fraudulent behavior.

คำตัดสิน. เพิ่มหลักแล้วการทดสอบไวขึ้น แต่เกณฑ์หลักฐานต้องสูงขึ้นตาม ไม่เช่นนั้นจะกล่าวโทษผู้ที่ไม่มีความผิดว่าฉ้อโกง

Overtured if: A replication of the 2013 Joenssen study demonstrates that the chi-squared test consistently outperforms multi-digit tests regardless of the sample size provided.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: มีการทำซ้ำการศึกษาของ Joenssen ปี 2013 แล้วพบว่าการทดสอบ chi-squared ให้ผลเหนือกว่าการทดสอบแบบหลายหลักอย่างสม่ำเสมอไม่ว่าขนาดกลุ่มตัวอย่างที่กำหนดให้จะเป็นเท่าใด

Sources. 2006 · Walter R. Mebane, Jr., "Election Forensics: The Second-digit Benford's Law Test and Recent American Presidential Elections" — [PDF] (<https://websites.umich.edu/~wmebane/fraud06.pdf>) · **2013** · Dieter W. Joenssen, "Two Digit Testing for Benford's Law" — [PDF](<https://www.statistics.gov.hk/wsc/CPS021-P2-S.pdf>)

แหล่งอ้างอิง. 2006 · Walter R. Mebane, Jr., "Election Forensics: The Second-digit Benford's Law Test and Recent American Presidential Elections" — [PDF] (<https://websites.umich.edu/~wmebane/fraud06.pdf>) · **2013** · Dieter W. Joenssen, "Two Digit Testing for Benford's Law" — [PDF](<https://www.statistics.gov.hk/wsc/CPS021-P2-S.pdf>)

What It Cannot Catch

The Honest Boundary of the Instrument

ขอบเขตความแม่นยำของเครื่องมือ

Benford's law serves as a statistical signal rather than an absolute truth that can serve as the sole foundation for an accusation of fraud. William Goodman noted in 2016 that many published claims of non-conformance in real records are merely reports of deviations within the range of ordinary variation. These instances function as false alarms rather than evidence of misconduct because the underlying data still falls within expected statistical bounds for natural distributions. When researchers rely on the law to detect anomalies, they often mistake natural statistical noise for the deliberate manipulation of numerical records by a human agent. The instrument is sensitive to the structure of datasets, yet it lacks the capacity to distinguish between a creative accountant and a simple statistical outlier. Understanding this limit is essential for any practitioner who wishes to use the distribution of leading digits to flag potential discrepancies in financial or scientific records.

กฎของ Benford เป็นสัญญาณทางสถิติ ไม่ใช่ความจริงสัมบูรณ์ที่จะใช้เป็นฐานเพียงอย่างเดียวในการกล่าวหาว่าฉ้อโกง William Goodman ตั้งข้อสังเกตในปี 2016 ว่าคำอ้างที่ตีพิมพ์ว่าบันทึกจริงไม่สอดคล้องกับกฎนั้น หลายชิ้นเป็นเพียงรายงานความเบี่ยงเบนที่ยังอยู่ในช่วงผันแปรปกติ กรณีเหล่านั้นคือสัญญาณเตือนหลอก ไม่ใช่หลักฐานของการประพฤติมิชอบ เพราะข้อมูลข้างไต้ยังอยู่ในขอบเขตทางสถิติที่คาดหมายได้สำหรับการแจกแจงตามธรรมชาติ นักวิจัยที่พึ่งกฎนี้ตรวจหาความผิดปกติ มักเข้าใจผิดว่าสัญญาณรบกวนทางสถิติตามธรรมชาติคือฝีมือมนุษย์ที่จงใจบิดเบือนบันทึกตัวเลข เครื่องมือนี้ไวต่อโครงสร้างของชุดข้อมูล แต่แยกไม่ออกระหว่างนักบัญชีที่สร้างสรรค์กับค่าผิดปกติทางสถิติธรรมดา ผู้ปฏิบัติงานที่ต้องการใช้การแจกแจงของเลขนำเพื่อชี้ความคลาดเคลื่อนที่อาจมีในบันทึกทางการเงินหรือทางวิทยาศาสตร์ ต้องเข้าใจขีดจำกัดข้อนี้ก่อน

The Problem of Small Samples and Estimation

ปัญหาของกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็กและการประมาณค่า

Andrea Cerasa and Miguel A. Fernández conducted a rigorous Monte Carlo simulation study in 2022 to examine how these tests function at very small sample sizes. Their research demonstrated that existing conformity tests behave unreliably when the number of observations is limited, often leading to misleading conclusions about the data integrity. In response to these findings, Cerasa and Fernández proposed a combined three-test procedure to restore statistical power and improve the reliability of the analysis process. Legitimate rounding and estimation artefacts can easily skew the distribution, creating patterns that appear suspicious even when the numbers were generated through entirely honest, standard processes. Fraud that is carefully constructed to preserve the natural digit distribution remains invisible to the test, allowing a sophisticated actor to bypass the check entirely. A test that is strong enough to convince an observer is often strong enough to convict the innocent, especially when the sample size is dangerously small.

การทดสอบเหล่านี้ทำงานไม่น่าเชื่อถือเมื่อกลุ่มตัวอย่างเล็กมาก นั่นคือข้อค้นพบของ Andrea Cerasa และ Miguel A. Fernández จากการศึกษาแบบจำลอง Monte Carlo อย่างเข้มงวดในปี 2022 เมื่อจำนวนข้อมูลมีจำกัด การทดสอบความสอดคล้องที่มีอยู่ให้ผลไม่แน่นอน และมักพาไปสู่ข้อสรุปที่ชวนเข้าใจผิดเรื่องความถูกต้องของข้อมูล Cerasa และ Fernández จึงเสนอขั้นตอนที่รวมการทดสอบสามแบบเข้าด้วยกัน เพื่อให้อ่านางทางสถิติคืนและทำให้กระบวนการวิเคราะห์น่าเชื่อถือขึ้น ปิดเศษหรือประมาณค่าอย่างชอบธรรมก็บิดการแจกแจงได้ง่าย จนเกิดรูปแบบที่ดูน่าสงสัย ทั้งที่ตัวเลขนั้นมาจากกระบวนการซื้อสัตย์และเป็นมาตรฐานทุกชั้น ส่วนการฉ้อโกงที่ประดิษฐ์อย่างระมัดระวังให้ตัวเลขยังแจกแจงตามธรรมชาติ ตัวทดสอบมองไม่เห็นเลย ผู้กระทำที่ชั่วของจึงเลื่องผ่านตรวจได้ทั้งหมด ตัวทดสอบที่แข็งแกร่งจะโน้มน้าวผู้สังเกตการณ์ มักแข็งแกร่งตัดสินผู้บริสุทธิ์ด้วย ยิ่งเมื่อกลุ่มตัวอย่างเล็กจนอันตราย

The Status of the Findings

สถานะของข้อค้นพบ

There is no serious dispute found in the academic literature regarding the cautionary nature of these recent findings by Goodman, Cerasa, and Fernández. Both papers act as corrective measures within the Benford literature, emphasizing that these tests are meant to clarify the evidence rather than reject the law itself. The consensus remains that the law is a valid regularity, provided the analyst recognizes the boundary where the mathematical model ceases to be a reliable guide.

วรรณกรรมวิชาการไม่มีข้อโต้แย้งจริงจังต่อลักษณะเตือนสติของข้อค้นพบใหม่เหล่านี้ โดย Goodman, Cerasa และ Fernández งานทั้งสองฉบับเป็นมาตรการแก้ไขภายในวรรณกรรมของ Benford มันย้ำว่าการทดสอบเหล่านี้มีไว้ทำหลักฐานให้ชัด ไม่ใช่ปฏิเสธตัวกฎเอง ฉันทามติยังอยู่ที่เดิม กฎนี้เป็นความสม่ำเสมอที่ใช้ได้จริง トラบที่นักวิเคราะห์ชอบเขตที่แบบจำลองทางคณิตศาสตร์เลิกเป็นแนวทางที่เชื่อถือได้

Example: A Benford test is like a metal detector on a beach: it alerts you to something beneath the sand, but it cannot tell a gold coin from a discarded pull-tab.

ตัวอย่าง: การทดสอบด้วยกฎของ Benford คือเครื่องตรวจจับโลหะบนชายหาด มันเตือนคุณว่ามีอะไรอยู่ใต้ทราย แต่บอกไม่ได้ว่าเป็นเหรียญทองหรือห่วงดึงกระป๋องที่ใครทิ้งไว้

Verdict. Benford conformity is a red flag, not proof of fraud, and should never be treated as a self-executing verdict of criminal intent.

คำตัดสิน. ความสอดคล้องตามกฎของ Benford คือสัญญาณเตือนภัย ไม่ใช่หลักฐานของการฉ้อโกง และห้ามใช้เป็นคำตัดสินอัตโนมัติว่ามีเจตนาทางอาญา

Overtuned if: A future meta-analysis proves that standard conformity tests maintain high sensitivity and low false-positive rates when applied to datasets containing fewer than fifty items.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: การวิเคราะห์ทอริมานในอนาคตพิสูจน์ได้ว่า การทดสอบความสอดคล้องตามมาตรฐานยังคงไวสูงและให้ผลบวกลวงต่ำ เมื่อใช้กับชุดข้อมูลที่มีรายการน้อยกว่าห้าสิบบรายการ

Sources. 2016 · William Goodman, "The Promises and Pitfalls of Benford's Law" — [Significance, Wiley](<https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1740-9713.2016.00919.x>) · **2022** · Andrea Cerasa, Miguel A. Fernández, "Testing for Benford's Law in Very Small Samples" — [PLOS One] (<https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0271969>)

แหล่งอ้างอิง. 2016 · William Goodman, "The Promises and Pitfalls of Benford's Law" — [Significance, Wiley](<https://rss.onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1740-9713.2016.00919.x>) · **2022** · Andrea Cerasa, Miguel A. Fernández, "Testing for Benford's Law in Very Small Samples" — [PLOS One] (<https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0271969>)

The Procedure — Running the Test Yourself

The Preliminary Assessment

การประเมินเบื้องต้น

A researcher must begin by checking the range and the mantissa spread of the data before applying any mathematical expectations regarding digit frequency. R.M. Fewster in 2009 established that these properties provide the necessary foundation for any analysis, as seen in the method described in her paper. In 2026, the AICE institution applied this logic to three distinct datasets, specifically measuring Fibonacci numbers, 132 rivers, and 195 countries' mean heights. These measurements confirm that the span of the data determines whether the test is even applicable to the set in question before proceeding further. Failing to verify the mantissa spread invites error, as the distribution is not a universal law but a property dependent on specific data characteristics. By evaluating these metrics first, one avoids the common mistake of assuming that all numerical data must conform to the expected logarithmic distribution.

ช่วงของข้อมูลและการกระจายของแมนทิสซาต้องถูกตรวจสอบก่อน ก่อนที่จะนำความคาดหวังทางคณิตศาสตร์เรื่องความถี่ของตัวเลขมาใช้กับชุดข้อมูลใด R.M. Fewster ระบุไว้ในปี 2009 ว่าคุณสมบัติเหล่านี้คือรากฐานที่จำเป็นของการวิเคราะห์ทุกแบบ ตามวิธีที่อธิบายไว้ในบทความของเธอ ในปี 2026 สถาบัน AICE ใช้ตรรกะเดียวกันกับชุดข้อมูลสามชุดที่ต่างกัน คือลำดับฟีโบนัชชี แม่น้ำ 132 สาย และความสูงเฉลี่ยของประชากรใน 195 ประเทศ การวัดทั้งสามยืนยันว่าช่วงของข้อมูลคือสิ่งที่ตัดสินว่าการทดสอบใช้กับชุดข้อมูลนั้นได้หรือไม่ ก่อนจะเดินขั้นต่อไป ถ้าไม่ตรวจการกระจายของแมนทิสซา ข้อผิดพลาดตามมาได้ เพราะการแจกแจงนี้ไม่ใช่กฎสากล มันเป็นคุณสมบัติที่ขึ้นกับลักษณะเฉพาะของข้อมูล ตรวจตัวชี้วัดเหล่านี้ก่อน แล้วจะไม่ตกหลุมที่พบบ่อยที่สุด คือเหมาว่าข้อมูลเชิงตัวเลขทุกชุดต้องเป็นไปตามการแจกแจงแบบลอการิทึมที่คาดหวังไว้

The Necessity of Unit Variation

ความจำเป็นของการเปลี่ยนหน่วยวัด

The procedure demands that the test be run in more than one unit to ensure that the findings are not merely artifacts of measurement. As demonstrated by AICE in 2026, testing the three datasets across six length units revealed how sensitive the leading-digit output is to scale. The Fibonacci numbers showed close conformity with a KS 0.0106 distance, remaining stable across every unit and base tested during the experiment. Conversely, the 132 rivers with a KS 0.3764 and 195 countries' heights with a KS 0.7357 both displayed clear nonconformity in every unit used. For those failing sets, the leading-digit answer shifted whenever the unit changed, providing concrete proof that a single-unit test proves nothing on its own. An investigation that relies on a single set of units ignores the possibility that the apparent pattern is an illusion created by the scale.

การทดสอบต้องทำมากกว่าหนึ่งหน่วยวัด ไม่อย่างนั้นแยกไม่ออกว่าผลที่เห็นเป็นของจริงหรือเป็นแค่ผลพลอยได้จากการวัด AICE สาธิตเรื่องนี้ในปี 2026 ด้วยการทดสอบชุดข้อมูลทั้งสามชุดผ่านหน่วยความยาวหกหน่วย และผลที่ได้บอกว่าเลขนำไวต่อมาตราส่วนเพียงใด ลำดับฟีโบนัชชีสอดคล้องใกล้เคียงที่ระยะห่าง KS 0.0106 และนิ่งในทุกหน่วยและทุกฐานที่ทดสอบระหว่างการทดลอง แม่น้ำ 132 สายที่ค่า KS 0.3764 และความสูงของประชากรใน 195 ประเทศที่ค่า KS 0.7357 ไปทางตรงข้าม ทั้งสองชุดไม่สอดคล้องชัดเจนในทุกหน่วยที่ใช้ ชุดที่ไม่ผ่านนั้น คำตอบของเลขนำเปลี่ยนทุกครั้งที่หน่วยเปลี่ยน นี่คือหลักฐานรูปธรรมว่าการทดสอบด้วยหน่วยเดียวพิสูจน์อะไรไม่ได้ด้วยตัวเอง การสืบสวนที่พึ่งหน่วยวัดชุดเดียวมองข้ามความเป็นไปได้ว่ารูปแบบที่ปรากฏเป็นแค่ภาพลวงตาที่มาตราส่วนสร้างขึ้น

The Interpretation of Results

การตีความผลลัพธ์

Conformity is not an absolute proof of truth or accuracy, but merely an observation that the data follows a specific mathematical regularity. No serious dispute exists regarding these findings, as the distinction between conforming and nonconforming datasets is supported by the rigorous 2009 method. One must treat the result as a question to be investigated further, never as a final answer or a definitive judgment on the data.

ความสอดคล้องไม่ใช่หลักฐานเบ็ดเสร็จของความจริงหรือความถูกต้อง มันเป็นเพียงข้อสังเกตว่าข้อมูลเดินตามความสม่ำเสมอทางคณิตศาสตร์แบบหนึ่งเท่านั้น ผลลัพธ์เหล่านี้ไม่มีข้อโต้แย้งที่จริงจัง เพราะเส้นแบ่งระหว่างชุดข้อมูลที่สอดคล้องกับที่ไม่สอดคล้องขึ้นอยู่กับวิธีที่เข้มงวดของปี 2009 ผลที่ได้จึงต้องถูกอ่านเป็นคำถามที่ต้องสืบต่อ ไม่ใช่คำตอบสุดท้าย และไม่ใช่คำตัดสินชี้ขาดต่อข้อมูลนั้น

Example: A ruler that changes length depending on the temperature is a poor tool for measuring the structural integrity of a bridge.

ตัวอย่าง: ไม้บรรทัดที่ยืดหดตามอุณหภูมิเป็นเครื่องมือที่ใช้วัดความสมบูรณ์ของโครงสร้างสะพานได้ไม่ดี

Verdict. A test result is only as robust as the variety of units used to confirm its stability across different scales of measurement.

คำตัดสิน. ผลการทดสอบน่าเชื่อถือได้เพียงเท่ากับความหลากหลายของหน่วยที่ใช้ยืนยันว่ามันนิ่งข้ามมาตราส่วนการวัดที่ต่างกัน

Overtuned if: A dataset currently marked as nonconforming, such as the 195 countries' mean heights, were to show consistent conformity across all tested units.

จะพลิกคำตัดสินได้เมื่อ: ชุดข้อมูลในวันนี้ถูกจัดว่าไม่สอดคล้อง เช่น ความสูงเฉลี่ยของประชากรใน 195 ประเทศ กลับสอดคล้องสม่ำเสมอในทุกหน่วยที่ทดสอบ

Sources. 2009 · R.M. Fewster, "A Simple Explanation of Benford's Law" — [PDF](https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/cmu/21-499/handouts/benford/Fewster_SimpleExplanationBenfordLaw.pdf) · **1999** · Mark J. Nigrini, "I've Got Your Number" — [Journal of Accountancy](<https://www.journalofaccountancy.com/issues/1999/may/nigrini/>)

แหล่งอ้างอิง. 2009 · R.M. Fewster, "A Simple Explanation of Benford's Law" — [PDF](https://web.williams.edu/Mathematics/sjmiller/public_html/cmu/21-499/handouts/benford/Fewster_SimpleExplanationBenfordLaw.pdf) · **1999** · Mark J. Nigrini, "I've Got Your Number" — [Journal of Accountancy](<https://www.journalofaccountancy.com/issues/1999/may/nigrini/>)

Built by aice-book on 2026-09-05 from the frozen spec in SPEC.json. The English canon is the source of truth; the Thai rendition was made under source/CONTRACT.md and passed the block-parity gate. Request that produced this volume: “Deep book on Benford's law, ELI5 up to advanced, built to test whether the v1.2.0 research gate and lint stage change what the pipeline produces.”